Plan

Bilan de liaison

Dipôle

Maxwell

Au-delà du dipôle

Combinaison de dipôles – polar.

Guide d'onde

Réseaux d'antennes

Ouverture synthétique

Principe de réciprocité

Antennes

J.-M Friedt

FEMTO-ST/département temps-fréquence

jmfriedt@femto-st.fr

transparents à `jmfriedt.free.fr`

7 avril 2016

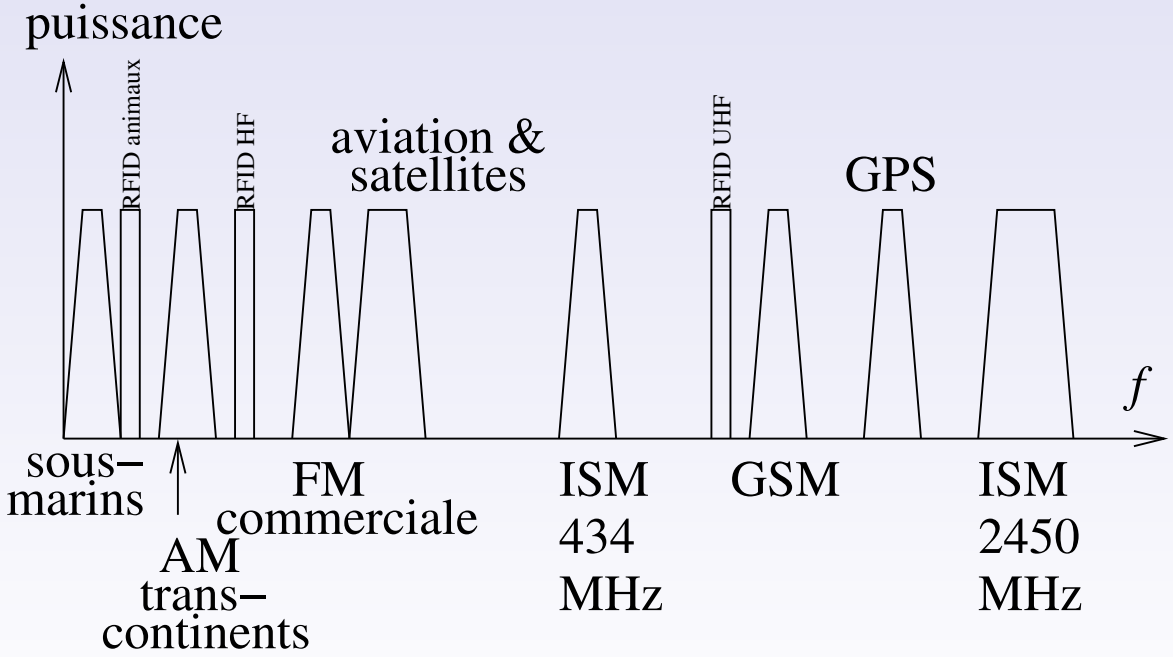
Objectif de cette présentation

S'approprier quelques concepts sur les liaisons sur porteuse radiofréquence, et sur l'élément qui convertit le signal électrique en signal électromagnétique

1. Pourquoi une liaison radiofréquence ? multiplexer le spectre et rendre le signal dans un format plus approprié pour sa transmission par faisceau électromagnétique
2. Bilan de liaison – équation de Friis
3. De la ligne de transmission au dipôle et au monopôle
4. Diagramme de rayonnement – aspects expérimentaux et simulation (NEC2)
5. Autres antennes – polarisation et combinaison de dipôles, patch, parabole, cornet, active
6. Guide d'onde et fréquence de coupure (diriger le faisceau)
7. Réseaux d'antennes – diagramme de rayonnement d'éléments rayonnants déphasés, et antenne à ouverture synthétique (RADAR)

Liaison radiofréquence

- remplacer le fil par une onde électromagnétique
- $\lambda = c/f \Rightarrow \lambda[\text{m}] = 300/f[\text{MHz}]$
- VLF pour pénétrer dans des milieux conducteurs/très longue portée
- VHF-UHF : 30-1000 MHz
- SHF (2400 MHz) $\Rightarrow \lambda = 12,5$ cm
- diverses porteuses pour multiplexer le spectre radiofréquence et transmettre diverses informations sur diverses bandes spectrales

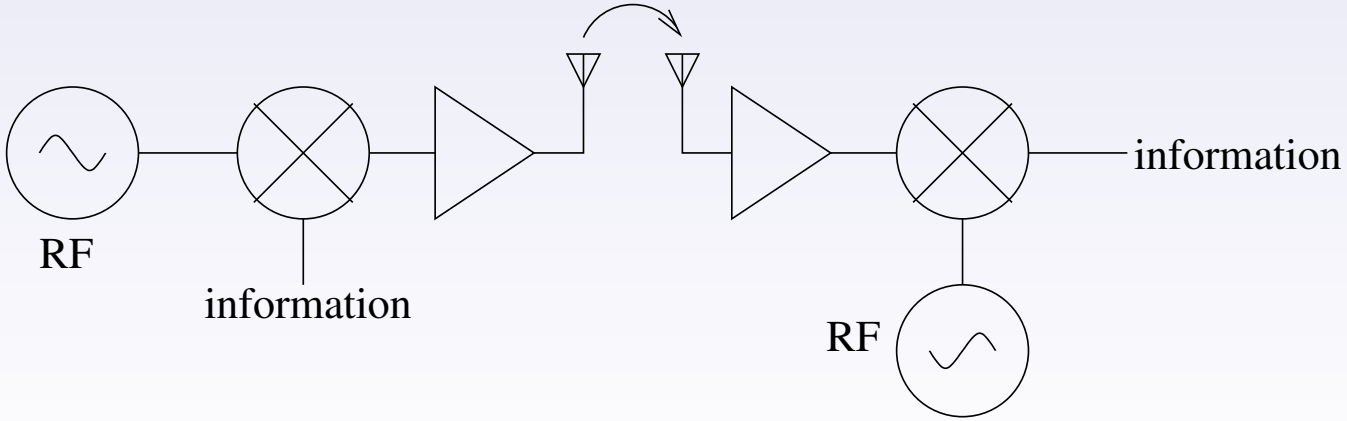


La fréquence de porteuse n'a pas d'importance, *seule la bande passante* définit la quantité d'information échangée.

Porteuse et modulation

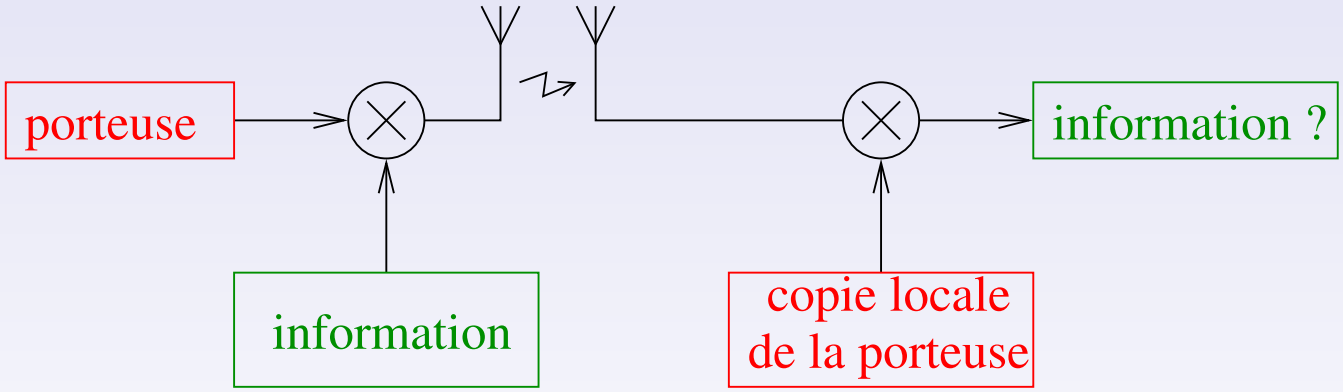
- Le morse : présence (1) ou absence (0) de porteuse
- transposition en fréquence du télégraphe
- peu robuste au bruit
- nommé dans la littérature OOK (On-Off Keying)
- évolution vers ASK (Amplitude Shift Keying), FSK (Frequency Shift Keying), PSK (Phase Shift Keying)... pour les transmissions numériques

Question : comment transposer un signal dans une bande de fréquence adéquate à l'application envisagée ?



Modulation et démodulation

- la porteuse fournit une référence de temps pour synchroniser les deux interlocuteurs
- un signal RF est caractérisé par 3 grandeurs (amplitude, fréquence, phase) qu'on peut faire varier pour transporter une information
- un oscillateur local reproduit la porteuse, qu'il faut identifier pour l'éliminer et extraire le signal (modulation)



Seul un mécanisme *non-linéaire* (multiplication) permet de sommer des fréquences.

Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Bilan de liaison

- une puissance radiofréquence (électrique) est rayonnée, soit de façon isotrope soit de façon directive avec un gain d'antenne G_1 : $P_E \times G_1$
- cette puissance se répartit sur une sphère centrée sur l'émetteur : en cas isotrope, la surface de cette sphère est, à distance d, $4\pi d^2$
- si $G_1 > 1$, alors seule la fraction $4\pi d^2/G_1$ est illuminée
- cette sphère intersecte un récepteur qui détecteur sur une sphère de 4π stéradians une surface caractéristiques de λ^2
- ce récepteur présente éventuellement un gain de réception G_2

$$\frac{P_R}{P_E} = G_1 G_2 \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \text{ : équation de Friis}$$

Application numérique :

1. un satellite NOAA POES [1] émet 5 W (37 dBm) à 137 MHz avec un gain de 3 dBi et orbite à 870 km
2. $FSPL = 134$ dB$\Rightarrow P_R = -95$ dBm
3. DVB-T : limite de détection autour de -110 dBm (10 dB SNR)

1. https://www.nasa.gov/pdf/111742main_noaa_n_booklet.pdf

Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Bilan de liaison

- une puissance radiofréquence (électrique) est rayonnée, soit de façon isotrope soit de façon directive avec un gain d'antenne G_1 : $P_E \times G_1$
- cette puissance se répartit sur une sphère centrée sur l'émetteur : en cas isotrope, la surface de cette sphère est, à distance d, $4\pi d^2$
- si $G_1 > 1$, alors seule la fraction $4\pi d^2/G_1$ est illuminée
- cette sphère intersecte un récepteur qui détecteur sur une sphère de 4π stéradians une surface caractéristiques de λ^2
- ce récepteur présente éventuellement un gain de réception G_2

$$\frac{P_R}{P_E} = G_1 G_2 \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \text{ : équation de Friis}$$

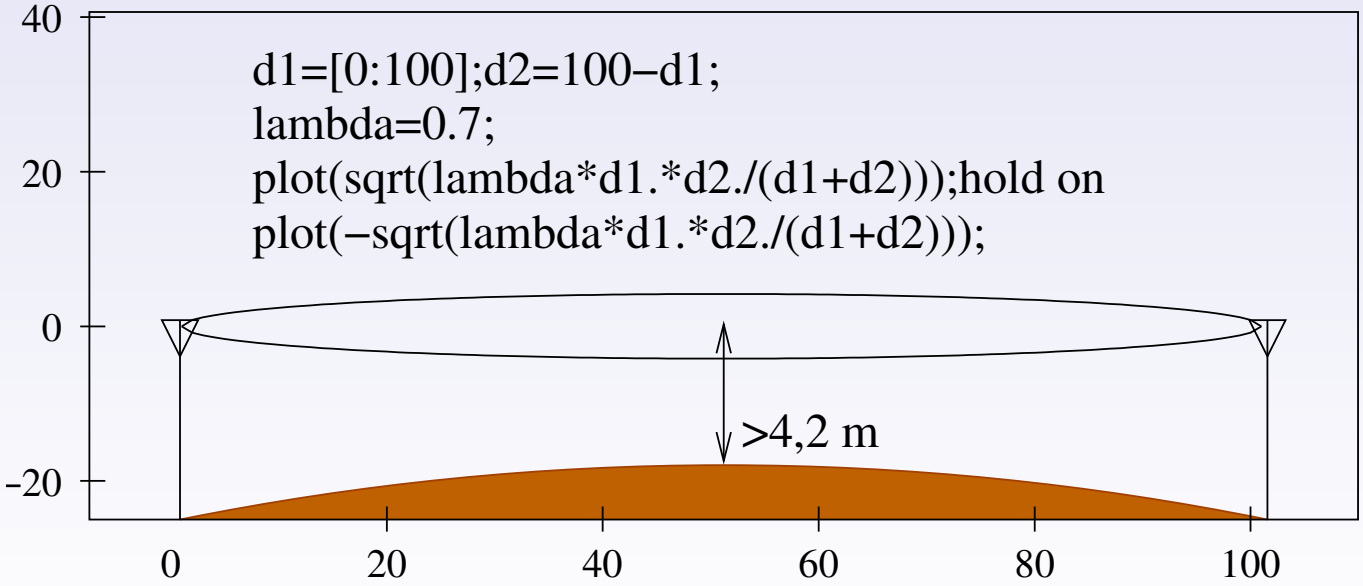
Application numérique :

1. un satellite IRIDIUM [1] émet 12 W (11 dBW) EIRP à 1620 MHz et orbite à 780 km
2. $FSPL = 154$ dB$\Rightarrow P_R = -143$ dBm(+27 dB ampli ant.=-116 dBm)
3. DVB-T : limite de détection autour de -95 dBm (10 dB SNR)

1. www.erodocdb.dk/docs/doc98/official/pdf/ECCRep171.pdf

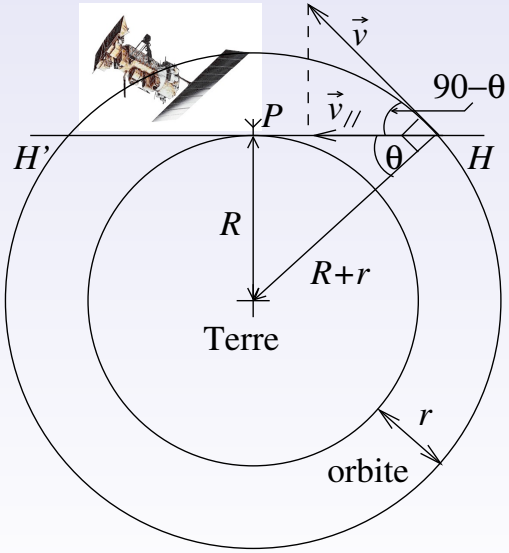
Bilan de liaison (sol)

- réflexions/chemins multiples (interférences destructives, *fading*)
- zone de Fresnel (zone au-delà de laquelle les réflexions multiples interfèrent)
  $r = \sqrt{\frac{n\lambda \cdot d_1 \cdot d_2}{d_1+d_2}}$, $n \in \mathbb{N}$ ($n = 2p$ interférence constructive, $n = 2p+1$ interfèrence destructive)
- $r < \sqrt{\lambda D}/2$ si $D = d_1 + d_2$ (cf champ proche v.s champ lointain)
- absorption par l'environnement (eau, sol)



Bilan de liaison (sol)

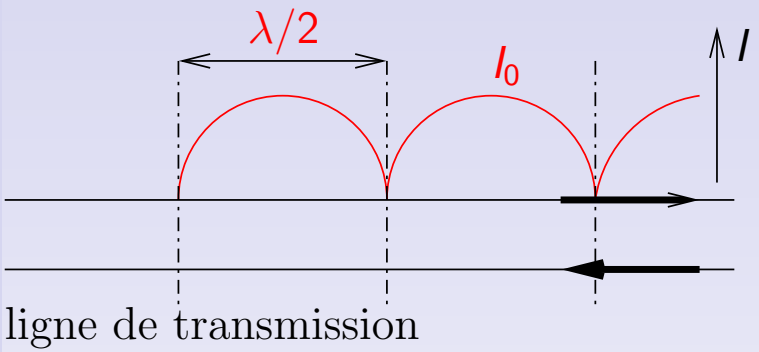
- réflexions/chemins multiples (interférences destructives, *fading*)
- zone de Fresnel (zone au-delà de laquelle les réflexions multiples interfèrent)
  $r = \sqrt{\frac{n\lambda \cdot d_1 \cdot d_2}{d_1 + d_2}}$, $n \in \mathbb{N}$ ($n = 2p$ interférence constructive, $n = 2p + 1$ interfèrence destructive)
- $r < \sqrt{\lambda D}/2$ si $D = d_1 + d_2$ (cf champ proche v.s champ lointain)
- absorption par l'environnement (eau, sol)

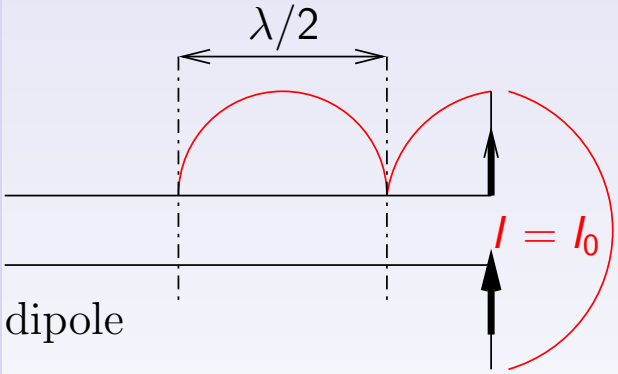


Distance d à laquelle un émetteur à l'altitude r peut communiquer :
$\sin(\theta) = \frac{R}{r+R}$ et $d = R \times (\pi/4 - \theta)$
$\Rightarrow d = R \arccos\left(\frac{R}{r+R}\right)$
où $R \simeq 6400$ km
(LEO : $r = 800$ km $\Rightarrow d \simeq 3000$ km)
(Puy de Dome : $r \simeq 1,5$ km $\Rightarrow d \simeq 140$ km)

Quelques idées sur le dipôle

De la ligne de transmission au dipôle [2]





- Les lignes de champ s'annulent dans la ligne de transmission
- Les lignes de champ se somment dans l'élément rayonnant
- Courant maximum au point d'alimentation (*feed*) et nul aux extrémités
- Brins de longueur $\lambda/4$ pour donner un dipôle (longueur : $\lambda/2$)
- Polarisation rectiligne
- $Z = 73 + j \cdot 42,5\ \Omega$

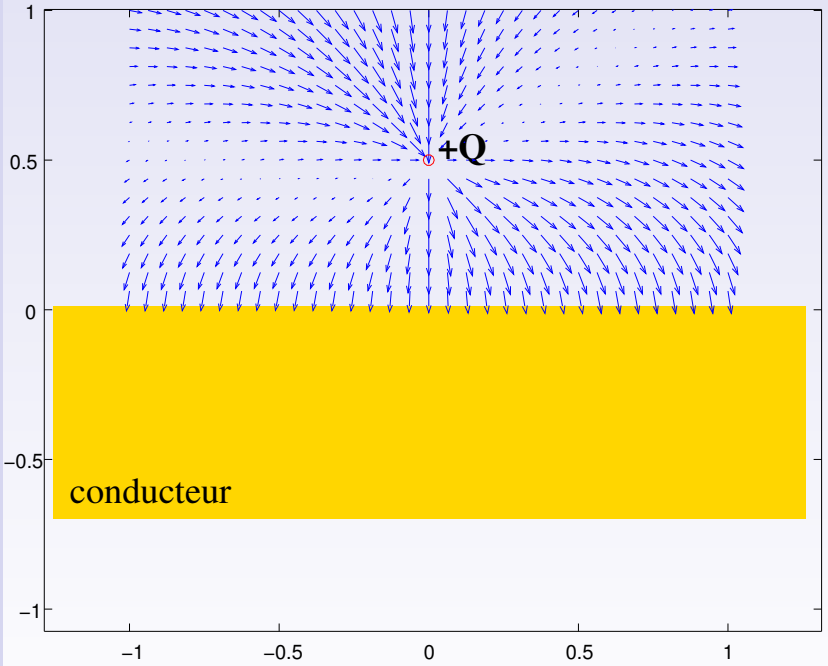
2. C.A. Balanis, *Antenna Theory, Analysis and Design, 3rd Ed.*, Wiley Interscience (2005)

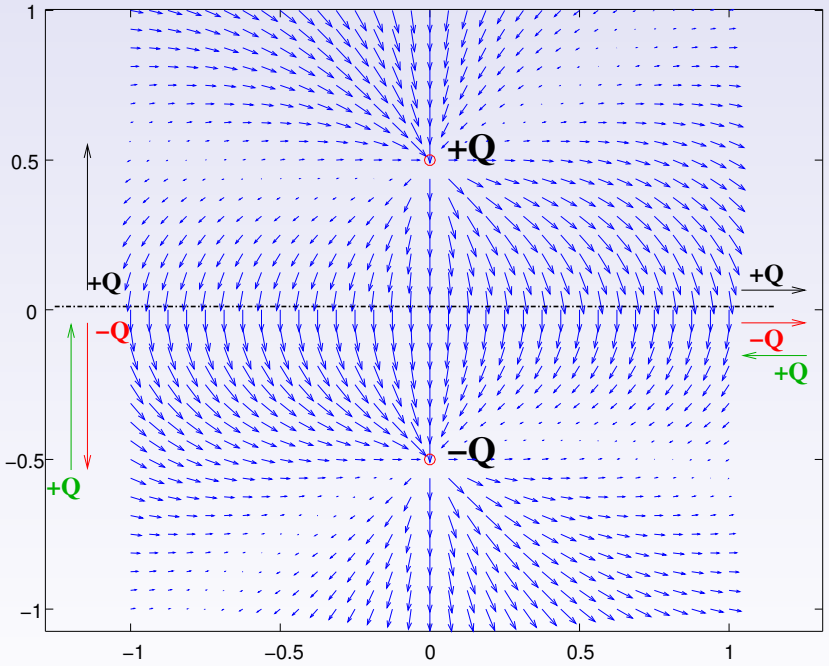
Le dipôle

Le dipôle est à la base de presque tous les éléments rayonnant :

- diagramme de rayonnement du dipôle seul
- la Yagi est un dipôle dont le rayonnement est orienté par un réseau
- au foyer d'une parabole
- polarisation circulaire : les dipôles croisés et déphasés.

Le monopôle [3]





3. J.D. Kraus & K.R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill (1981), p.295

Plan

Bilan de liaison

Dipôle

Maxwell

Au-delà du dipôle

Combinaison de dipôles – polar.

Guide d'onde

Réseaux d'antennes

Ouverture synthétique

Principe de réciprocité

Le dipôle

Le dipôle est à la base de presque tous les éléments rayonnant :

- diagramme de rayonnement du dipôle seul
- la Yagi est un dipôle dont le rayonnement est orienté par un réseau
- au foyer d'une parabole
- polarisation circulaire : les dipôles croisés et déphasés.

Le monopôle

- Principe des charges miroirs : un élément rayonnant placé au dessus d'un plan métallique est équivalent à un élément rayonnant + sa copie par symétrie p.r au plan métallique
- monopôle = élément rayonnant vertical au dessus d'un plan de masses
- charges miroir transforme monopôle + plan de masse en dipôle
- élément rayonnant dans les cornets

Calcul du diagramme de rayonnement du dipôle

Toute la théorie des antennes se déduit des équations de Maxwell [3]

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{dt} \right) \\ \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{cases}$$

pour une distribution de charges ρ et de courants $\vec{j}$ qui vérifient par conservation de la charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

En régime périodique de pulsation ω

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + j\omega\varepsilon \vec{E} \right) \\ \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{cases}$$

et $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j\omega\rho = 0$

3. https://epfl.wikispaces.com/file/view/REA_Polycop_0708.pdf

Calcul du diagramme de rayonnement du dipôle

Toute la théorie des antennes se déduit des équations de Maxwell [3]

$$\text{rappel} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

pour une distribution de charges ρ et de courants $\vec{j}$ qui vérifient par conservation de la charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
En régime périodique de pulsation ω

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + j\omega\varepsilon \vec{E} \right) \\ \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{cases}$$

et $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j\omega\rho = 0$

3. https://epfl.wikispaces.com/file/view/REA_Polycop_0708.pdf

Calcul du diagramme de rayonnement du dipôle

Toute la théorie des antennes se déduit des équations de Maxwell [3]

$$\text{rappel} \quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z \\ \partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x \\ \partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y \end{pmatrix}$$

pour une distribution de charges ρ et de courants $\vec{j}$ qui vérifient par conservation de la charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

En régime périodique de pulsation ω

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + j\omega\varepsilon \vec{E} \right) \\ \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{cases}$$

et $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j\omega\rho = 0$

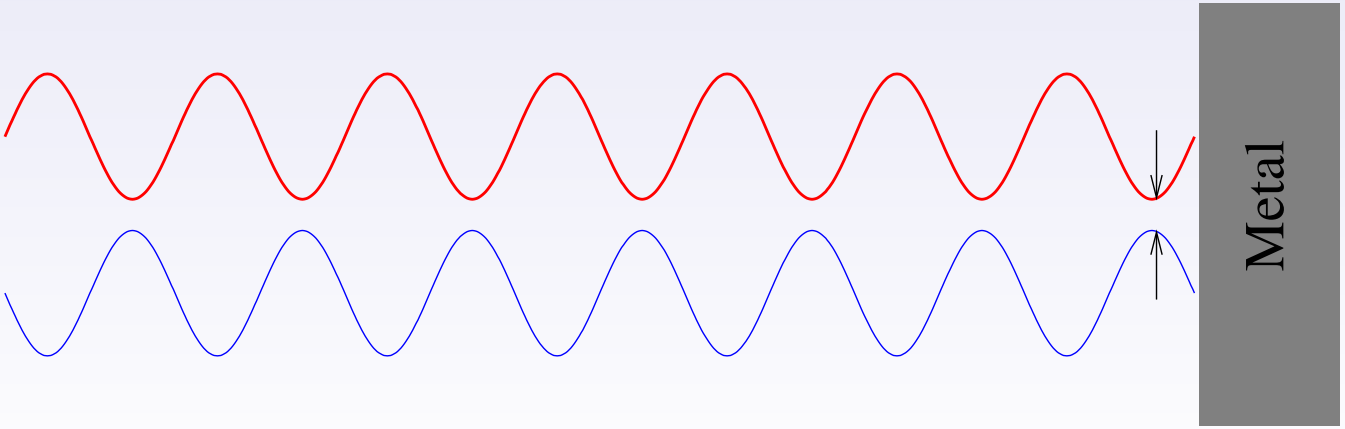
3. https://epfl.wikispaces.com/file/view/REA_Polycop_0708.pdf

Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Cas particulier des antennes

Conditions aux limites :

- composantes tangentielles du champ électrique continu $\vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$
- champ électrique **nul** dans le conducteur,
- par conséquent, $\vec{E}_t = \vec{0}$ **sur un conducteur**
- composantes normales du champ magnétique continues $-\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}$ si un courant de surface existe.
- réflexion normale à une surface métallique introduit une **rotation de 180° de la phase** (incident + réféchi = 0).



Plan

Bilan de liaison

Dipôle

Maxwell

Au-delà du dipôle

Combinaison de dipôles – polar.

Guide d'onde

Réseaux d'antennes

Ouverture synthétique

Principe de réciprocité

Vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \frac{1}{\eta} |\vec{E}|^2 \vec{e}_r$$

qui est purement radiale

La norme de ce vecteur $\vec{S} \cdot \vec{e}_r$ donne la densité de puissance rayonnée.

Intensité de rayonnement (indépendante de la distance)

$$U(\vartheta, \varphi) = r^2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{e}_r$$

$\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont orthogonaux et forment un trièdre direct, $\vec{S}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires pour une onde plane (champ lointain)

Champ proche/champ lointain

- Champ proche : zone où un champ évanescent existe ($Im(k) \neq 0$)
- Champ lointain : onde purement propagative, pas de champ évanescent ($k \in \mathbb{R}$)

$$d_{ff} \simeq \frac{2D^2}{\lambda}$$

avec D la plus grand dimension de l'antenne.

- amplitude du champ propagatif décroît en $1/r$

Exercice : à quelle distance caractériser une antenne parabole de 60 cm fonctionnant à 10 GHz ? une antenne cornet de 4 cm de côté ?

Calcul du diagramme de rayonnement du dipôle

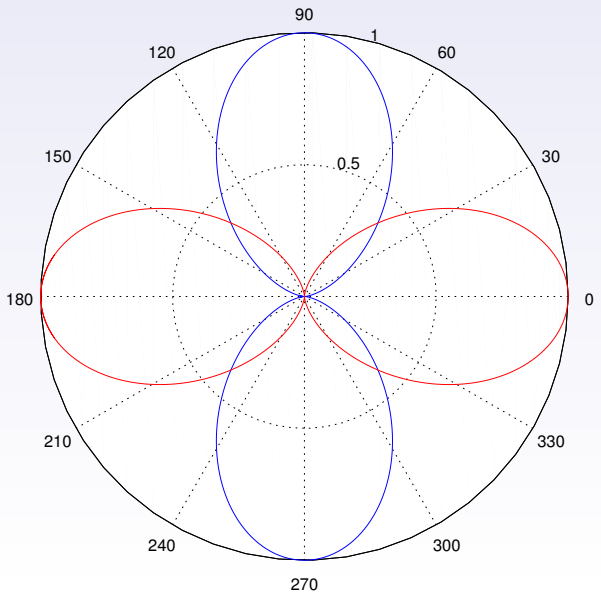
La source isotrope (dB**i**) :

$$\vec{E}(\vartheta, f) = \frac{\exp(-j \cdot k \cdot r)}{r\sqrt{2\pi}} \vec{u_\vartheta}$$

Le dipole de longueur L :

$$\vec{E}(\vartheta, f) = \frac{\eta \cdot jk}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-j \cdot kr)}{r} \cdot \frac{I_0}{\cos(\vartheta)} \cdot \cos\left(\frac{kL}{2} \cdot \sin(\vartheta)\right) \vec{u_\vartheta}$$

Si $L = \lambda/2$, alors le gain d'antenne est 2,15 dBi




```
frq=1*1e9; c   =3e8;
lambda=c./frq; K=2*pi./lambda;
th=[-189.5:189.5]*pi/180;

L=0.5 *lambda; % longeur totale antenne
Et=(cos(K*L/2*cos(th)))./sin(th);
polar(th,(Et.^2));hold on
Et=(cos(K*L/2*sin(th))-cos(K*L/2))./cos(th);
polar(th,Et.^2,'r')
```

Calcul du diagramme de rayonnement du dipôle

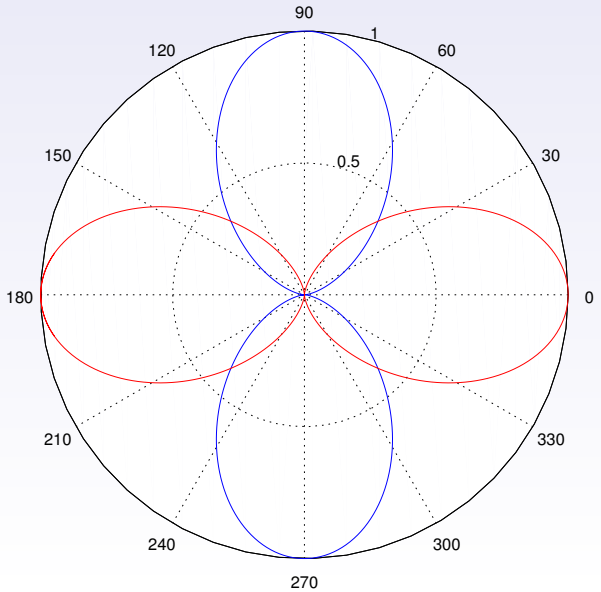
La source isotrope (dB**i**) :

$$\vec{E}(\vartheta, f) = \frac{\exp(-j \cdot k \cdot r)}{r\sqrt{2\pi}} \vec{u_\vartheta}$$

Le dipole de longueur L :

$$\vec{E}(\vartheta, f) = \frac{\eta \cdot jk}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-j \cdot kr)}{r} \cdot \frac{I_0}{\cos(\vartheta)} \left(\cos\left(\frac{kL}{2} \cdot \sin(\vartheta)\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right) \vec{u_\vartheta}$$

Si $L = \lambda/2$, alors le gain d'antenne est 2,15 dBi




```
frq=1*1e9; c  =3e8;
lambda=c./frq; K=2*pi./lambda;
th=[-189.5:189.5]*pi/180;

L=0.5 *lambda; % longeur totale antenne
Et=(cos(K*L/2*cos(th)))./sin(th);
polar(th,(Et.^2));hold on
Et=(cos(K*L/2*sin(th))-cos(K*L/2))./cos(th);
polar(th,Et.^2,'r')
```

Calcul de l'impédance du dipôle

Pour une antenne faite de conducteurs idéaux,

$$R_{rad} = \mathbb{R}e(Z) = \frac{P_{rad}}{I_{max}^2}$$

Dipôle infinitésimal : $|\vec{E}_\vartheta| \propto \sin(\vartheta)$ donc

$$P_{rad} = \frac{1}{2}\int_S \vec{S}\cdot\vec{e}_r\cdot dS = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \underbrace{r^2\sin(\vartheta)}_{\text{élément infinitésimal de surface}} \cdot\vec{S}\cdot\vec{e}_r\cdot d\vartheta$$

$$P_{rad} = 2\pi\int_0^{\pi}\sin(\vartheta)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\eta}{4\lambda^2}I_0^2\Delta z^2\sin^2(\vartheta)\right)\cdot d\vartheta = \frac{\pi}{6}\cdot\eta I_{max}^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2$$

$$\Rightarrow R_{rad} = \frac{\pi}{6}\eta\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \text{ avec } \eta \simeq 377\ \Omega \simeq 120\times\pi\ \Omega$$

$\Rightarrow$ possiblité d'ajuster la longueur du dipôle idéal pour adapter son impédance à la charge et à l'environnement
($\Delta z = \lambda/2 \Rightarrow R_{rad} = 197/4 = 49\ \Omega$ au lieu de $73\ \Omega$ pour un dipôle)

Noter que : $\int_0^{\pi}\sin^3(x)dx = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3\cos(x)}{4}\right]_0^{\pi} = 4/3$

Plan

Bilan de liaison

Dipôle

Maxwell

Au-delà du dipôle

Combinaison de dipôles – polar.

Guide d'onde

Réseaux d'antennes

Ouverture synthétique

Principe de réciprocité

Au-delà du dipôle

- un élément rayonnant qui remplace le câble entre émetteur-récepteur
- dimensions caractéristiques : $\lambda/2$ ou, en présence d'un plan métallique, $\lambda/4$ en utilisant les charges miroir,
- impédance, directivité, polarisation (NEC2, `www.nec2.org`)

Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Au-delà du dipôle

- un élément rayonnant qui remplace le câble entre émetteur-récepteur
- dimensions caractéristiques : $\lambda/2$ ou, en présence d'un plan métallique, $\lambda/4$ en utilisant les charges miroir,
- impédance, directivité, polarisation (NEC2, `www.nec2.org`)

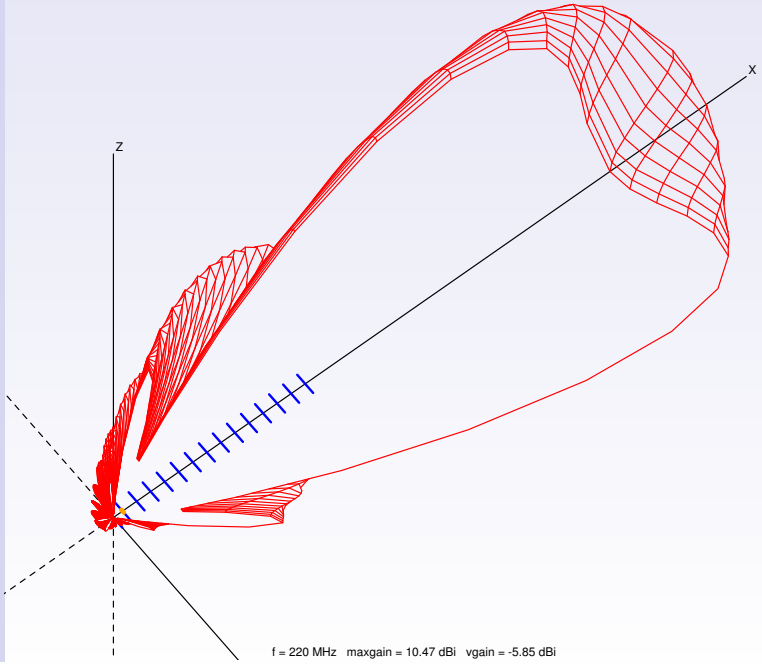
- Polarisation linéaire (horizontale, e.g. TV)
- Polarisation linéaire (verticale, e.g. FM)
- Polarisation circulaire (mouvement, e.g. satellite)
- Polarisation circulaire (RHCP v.s LHCP)
- erreur de polarisation $\Rightarrow P_R \propto \cos(\vartheta)^2$

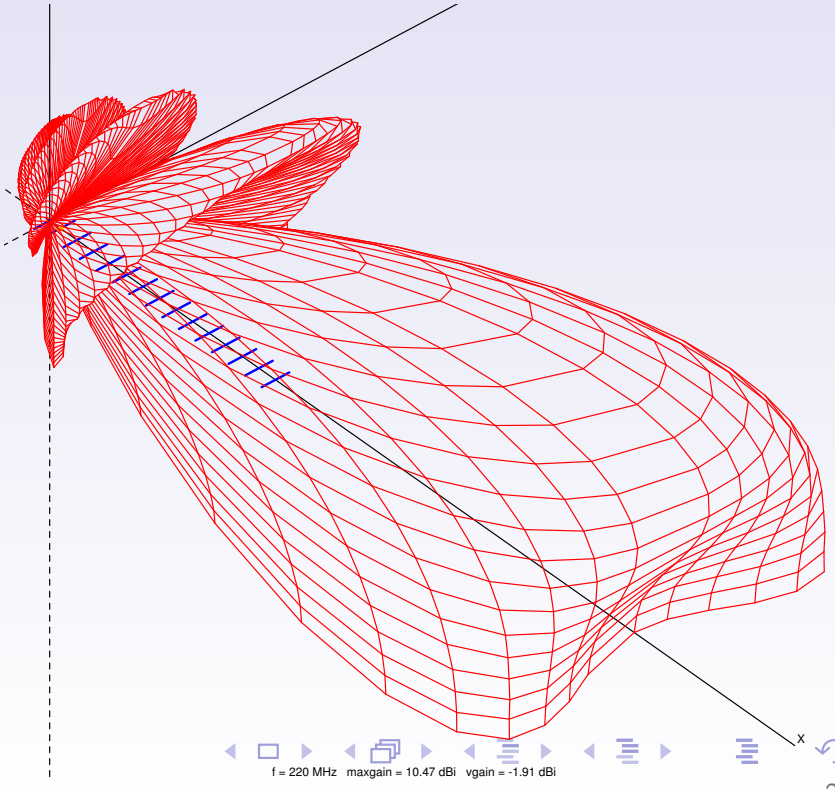
Au-delà du dipôle

- un élément rayonnant qui remplace le câble entre émetteur-récepteur
- dimensions caractéristiques : $\lambda/2$ ou, en présence d'un plan métallique, $\lambda/4$ en utilisant les charges miroir,
- largeur de faisceau, lobes secondaires,

#	freq.	Zr	Zi	SWR	gain	f/b	phi	theta
	220	26.1	2.2	1.9	10.47	-	0	76.5

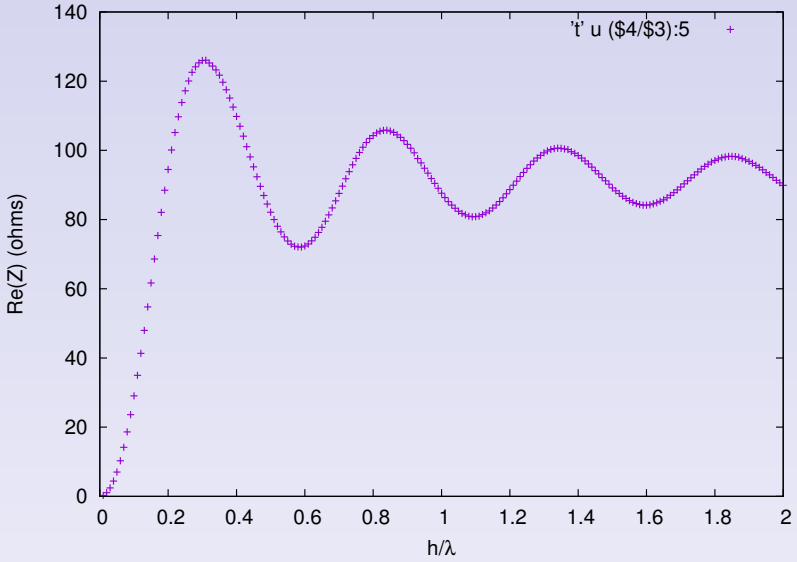
$$\frac{P_R}{R_E} = \left(\frac{SWR-1}{SWR+1}\right)^2$$

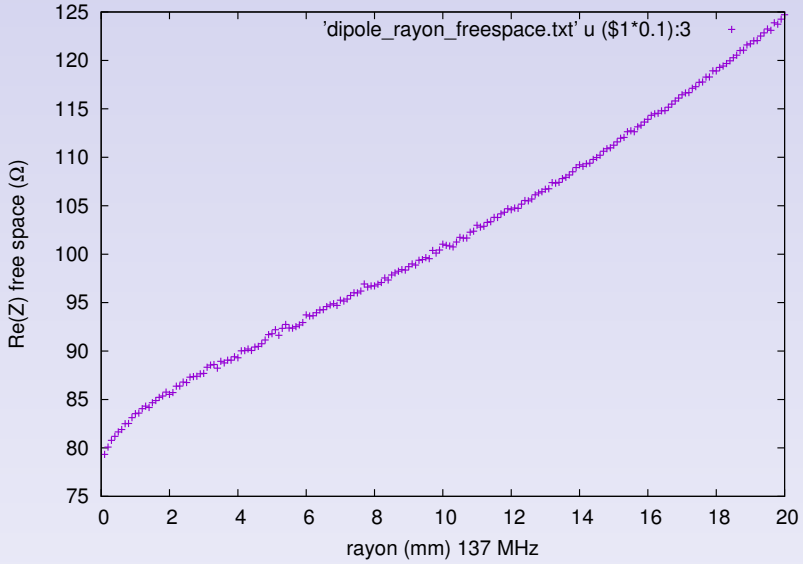




Simulations NEC (www.nec2.org)

Du dipole idéal au "vrai" dipole





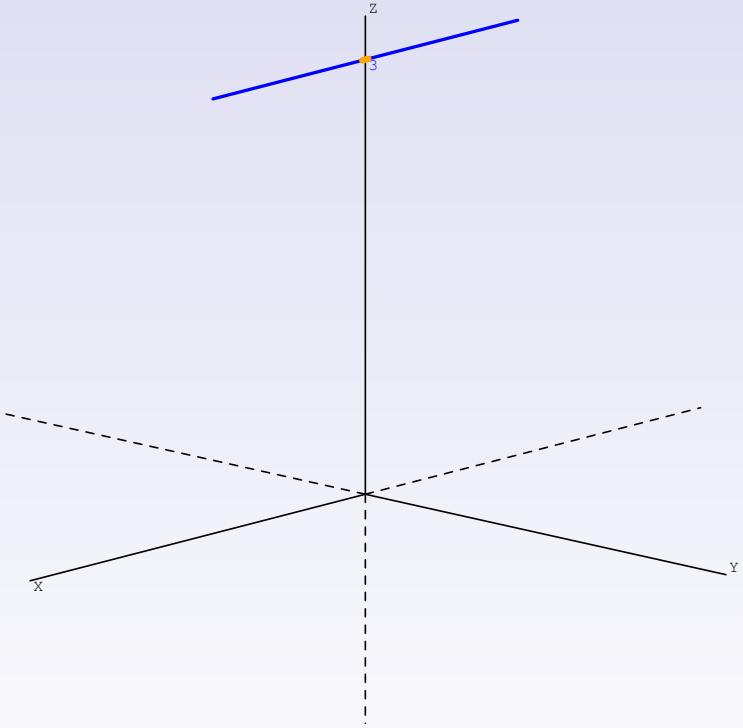
- Z dépend du rayon du conducteur et de la distance au sol
- Exemple de simulation sous NEC2 :

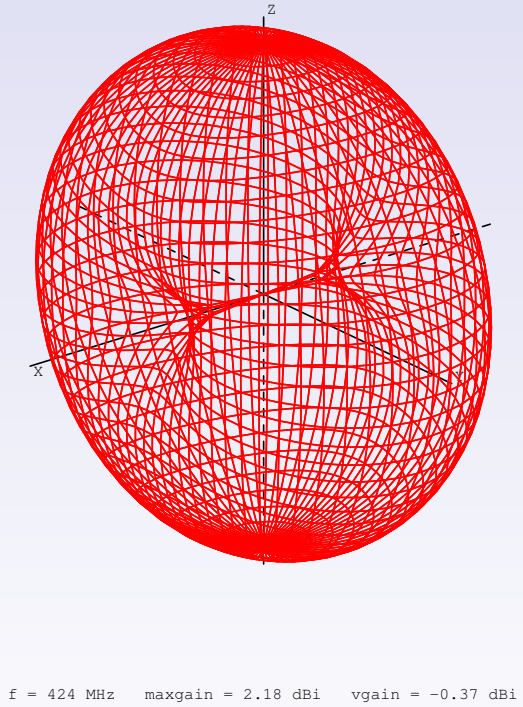
```
CM dipole : GN=1 pour gnd plane, 0 pour free space
CE
GW 3 51 -5.4745E-01 0.00E-01 0.1E01 5.47450E-01 0.00E-01 0.1E01 0.1E-2
GE 1
GN 1
EX 0 3 26 0 1.00000E+00 0.00000E+00
FR 0 1 0 0 1.37000E+02 1.00000E-00
RP 0 72 72 0 0.00000E+00 0.00000E+00 5.00000E+00 5.00000E+00
EN
```

Effet d'un plan de masse/sol

Diagrammes de rayonnement du dipôle (visualisation par `xnecview`)

- Espace libre : nulls dans l'axe du dipôle

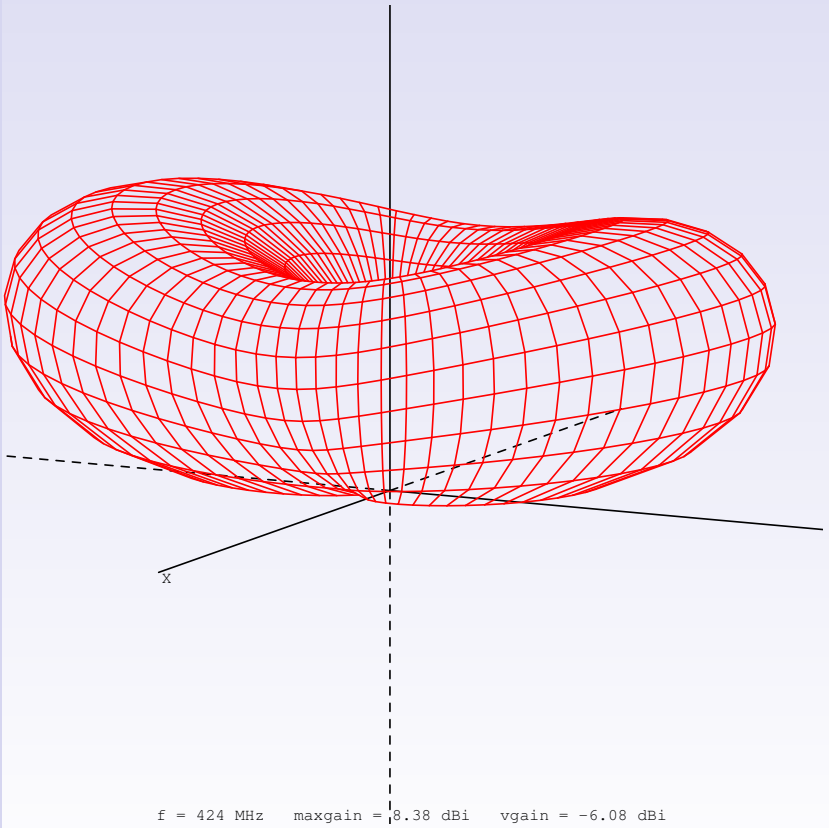


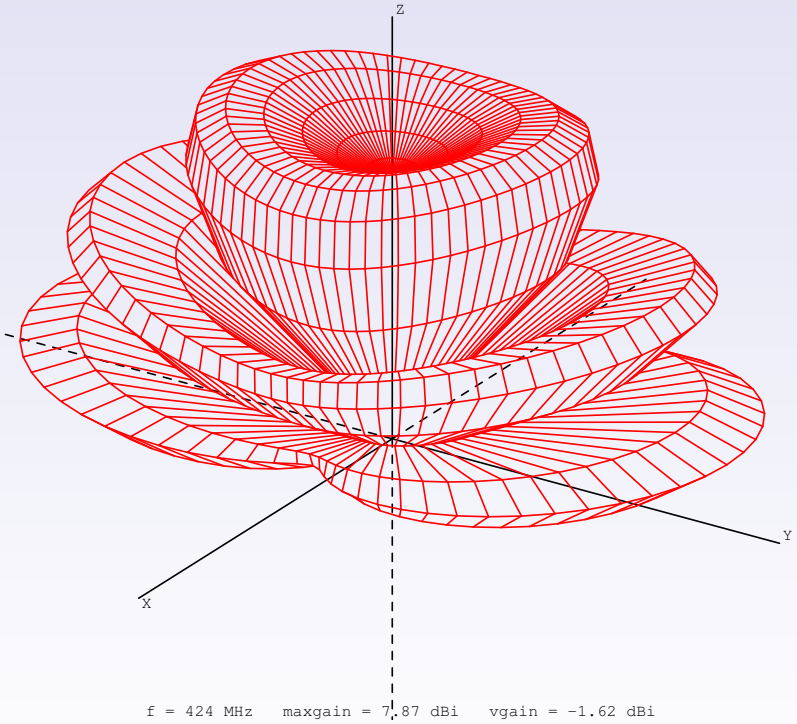


Effet d'un plan de masse/sol

Diagrammes de rayonnement du dipôle (visualisation par `xnecview`)

- Plan de masse : franges d'interférences
  $\Rightarrow$ nombre de pétales $= 2 \cdot \text{hauteur}/\lambda + 1$
- Nulls induisent perte de réception dans certaines directions

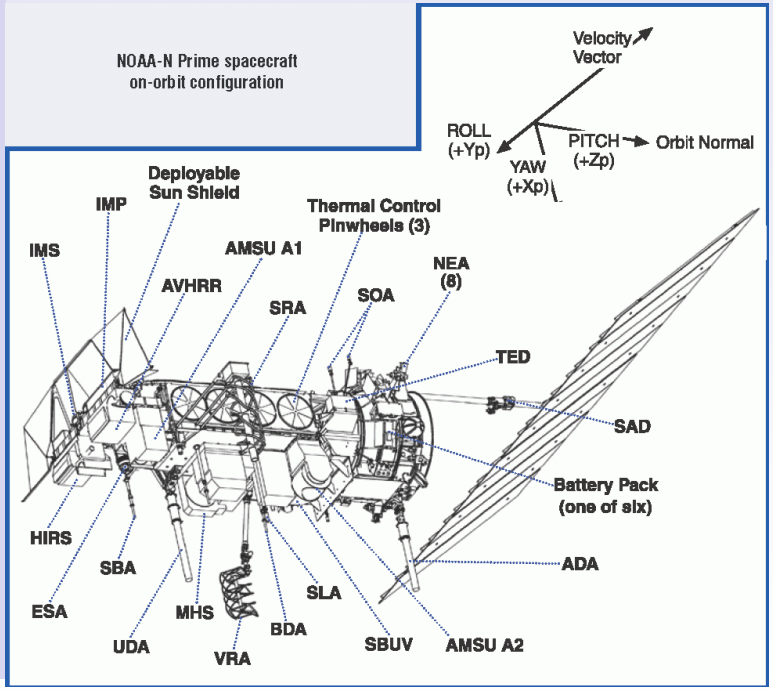




Polarisations circulaire

Passage de la polarisation linéaire à la polarisation circulaire : deux dipôles croisés déphasés de 90°.

- Un interlocuteur est mobile (drone, satellite ...),
- la puissance transmise entre deux interlocuteurs en polarisation linéaire dépend de $\cos(\vartheta)^2$,

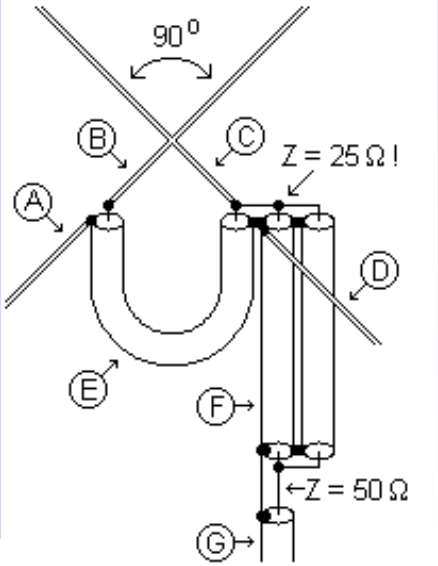


http://jcoppens.com/ant/qfh/img/noaa17qfh.jpg

Polarisations circulaire

Passage de la polarisation linéaire à la polarisation circulaire : deux dipôles croisés déphasés de 90°.

- Un interlocuteur est mobile (drone, satellite ...),
- la puissance transmise entre deux interlocuteurs en polarisation linéaire dépend de $\cos(\vartheta)^2$,
- donc perte de signal si les polarisations sont croisées.



hans.mayer.tv/html/crossdipole137.html

A, B, C, D : 510 mm

E : 50 Ω, 361 mm

F : 75 Ω × 2, 361 mm

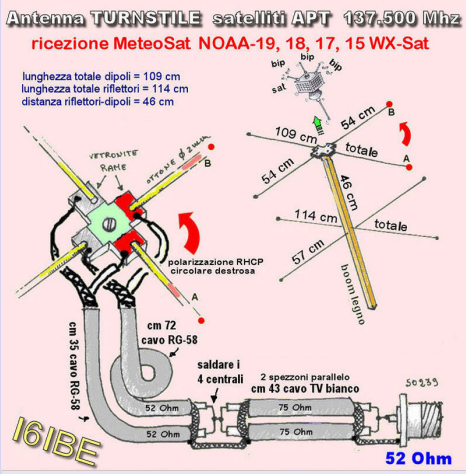
G : 50 Ω

http://jcoppens.com/ant/qfh/img/noaa17qfh.jpg

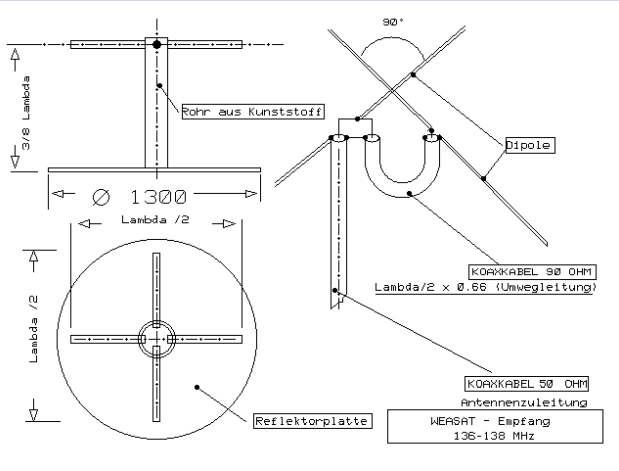
Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Combiner des dipôles

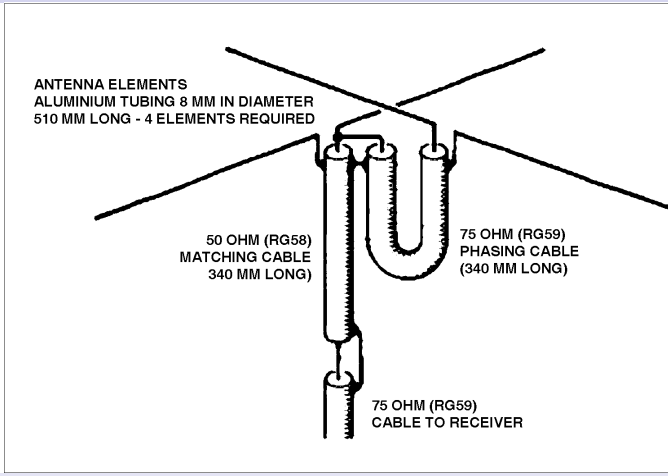
Créer une polarisation circulaire à partir de deux polarisations linéaires :



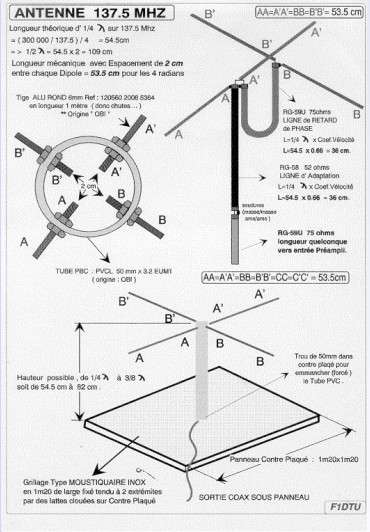
diegorispoli.it



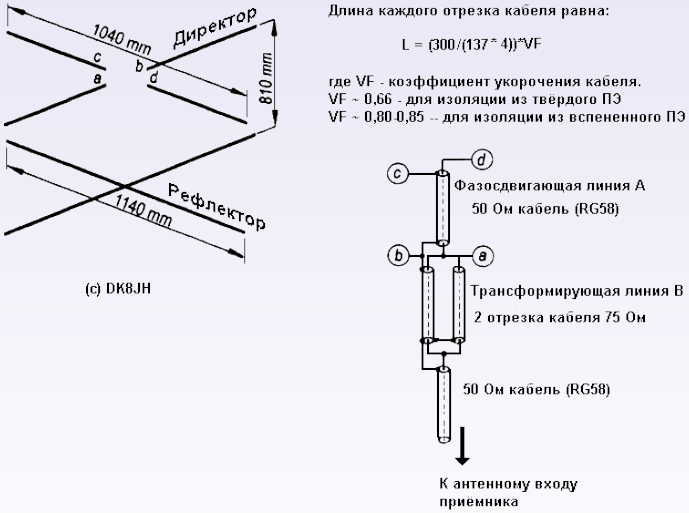
dl4cu.isa-geek.net



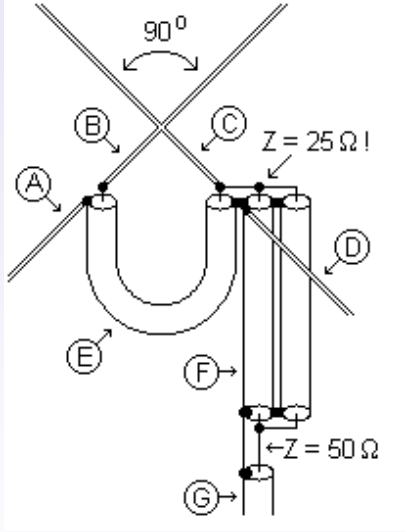
emgo.cz



f5fyu.free.fr



radio-sky.ru



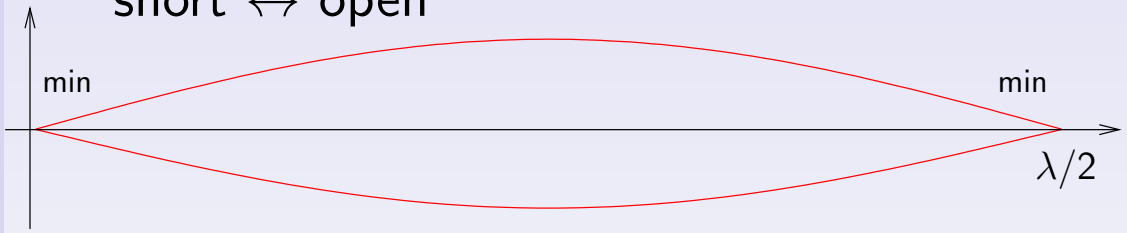
redsun.mayer.tv

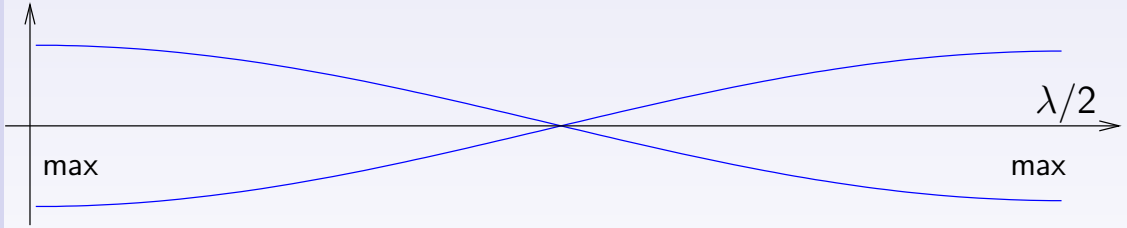
Transformateur d'impédance

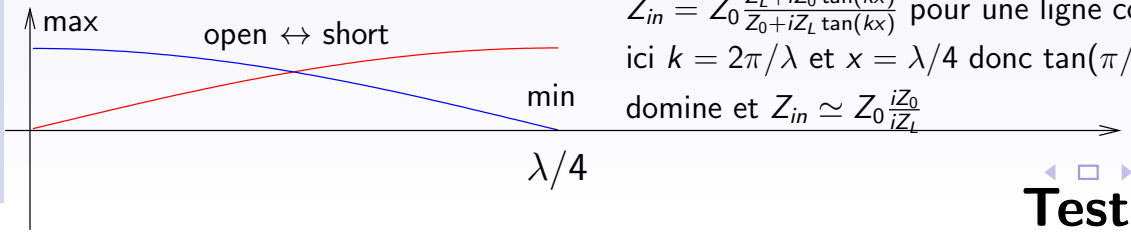
Un segment de cable coaxial d'impédance caractéristique se comporte comme transormateur d'impédance entre Z_{in} et Z_{out} tel que $Z_0 = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_{out}}$ (E. Rubiola, pp.32–37)

Théorie :

- les conditions limites d'une ligne de transmission se reproduisent tous les $\lambda/2$ (distance entre nœuds et ventre de l'onde stationnaire)
- une ligne de longueur $\lambda/4$ présente la condition opposée : short $\leftrightarrow$ open







$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan(kx)}{Z_0 + iZ_L \tan(kx)}$ pour une ligne courte ici $k = 2\pi/\lambda$ et $x = \lambda/4$ donc $\tan(\pi/2)$ domine et $Z_{in} \simeq Z_0 \frac{iZ_0}{iZ_L}$

Exemple Spice :

```
Transmission line: 5 ns=20/4=1/50 MHz
v1      1 0 ac 1 dc 0
rsource 1 2 75
t1      2 0 3 0 z0=150 td=5n
rload   3 0 300
.end

.control
ac dec 1 50meg 50meg
print v(1) v(1,2) v(1) v(2) v(3)
.endc
```

donne

```
v(1) = 1.000000e+00,0.000000e+00
v(1,2) = 5.000000e-01,2.296213e-17
v(2) = 5.000000e-01,-2.29621e-17
v(3) = 7.654042e-17,-1.00000e+00
```

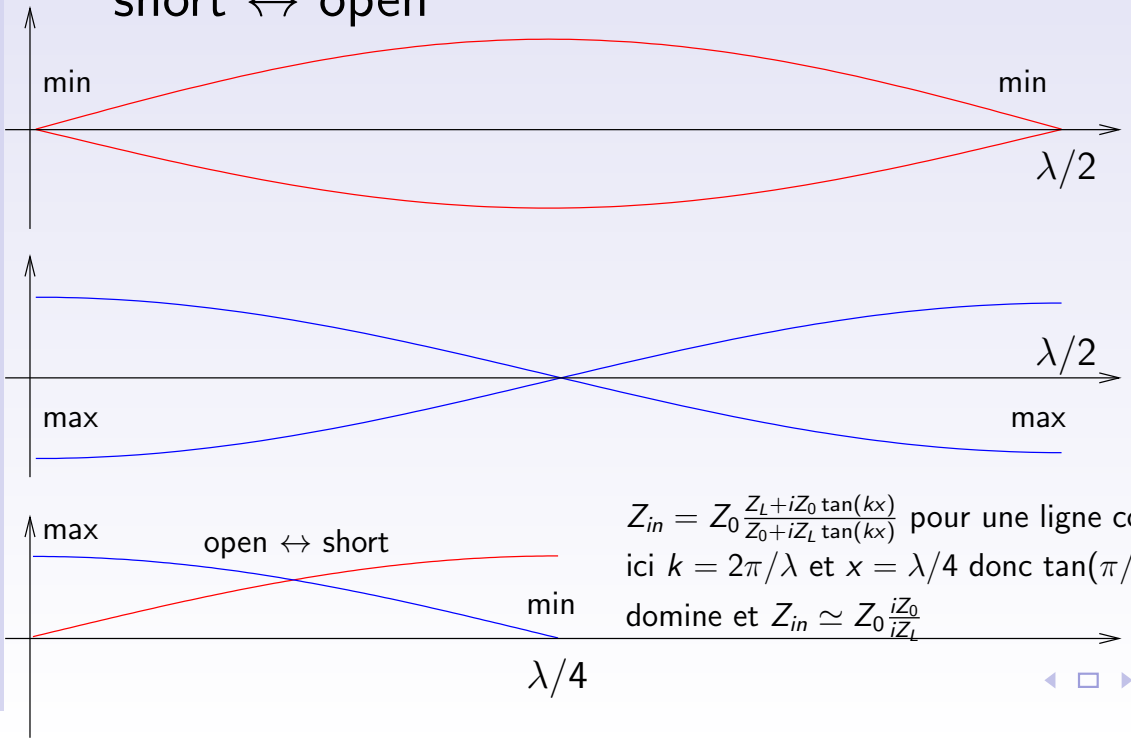
Tester 100 & 150 MHz ?

Transformateur d'impédance

Un segment de cable coaxial d'impédance caractéristique se comporte comme transormateur d'impédance entre Z_{in} et Z_{out} tel que $Z_0 = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_{out}}$

Théorie :

- les conditions limites d'une ligne de transmission se reproduisent tous les $\lambda/2$ (distance entre nœuds et ventre de l'onde stationnaire)
- une ligne de longueur $\lambda/4$ présente la condition opposée : short $\leftrightarrow$ open

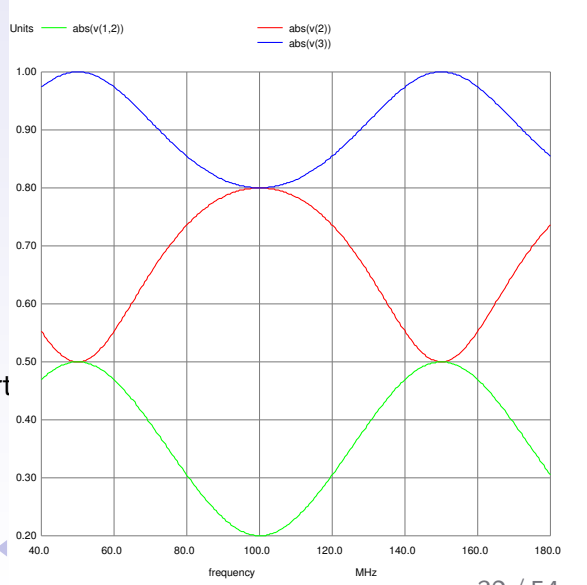


$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan(kx)}{Z_0 + iZ_L \tan(kx)}$ pour une ligne court

ici $k = 2\pi/\lambda$ et $x = \lambda/4$ donc $\tan(\pi/2)$

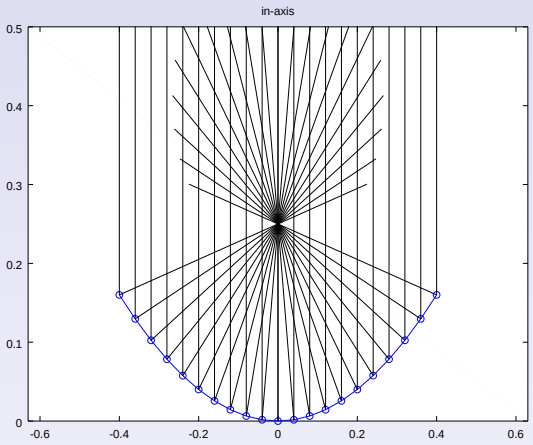
domine et $Z_{in} \simeq Z_0 \frac{iZ_0}{iZ_L}$

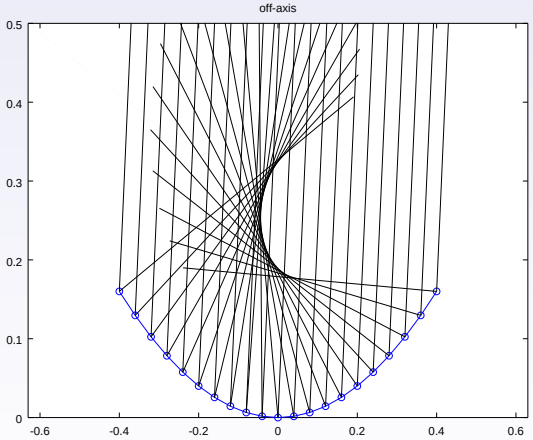
Exemple Spice :



Parabole

- Augmenter la surface collectrice A de l'antenne (diamètre d) et concentrer la puissance au foyer de la parabole
- Parabole : tout faisceau incident est concentré vers le foyer
- tête excentrée pour limiter la couverture du récepteur [4]
- architecture Cassegrain : réflecteur secondaire au foyer et récepteur au centre pour limiter les lobes latéraux
- $G = 4\pi A/\lambda^2 \times e = (\pi d/\lambda)^2 \times e$, $e \in [0,5..0,7]$
- ouverture angulaire : $\vartheta \simeq \lambda/d$



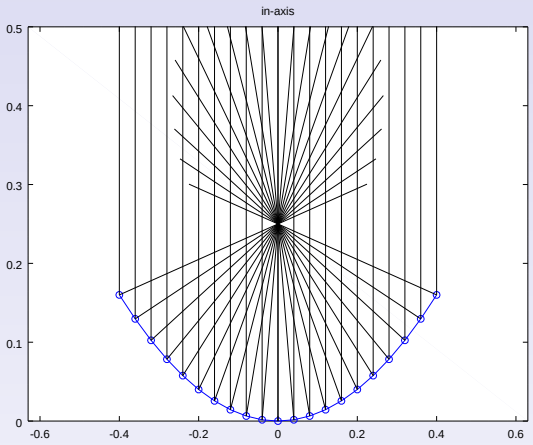


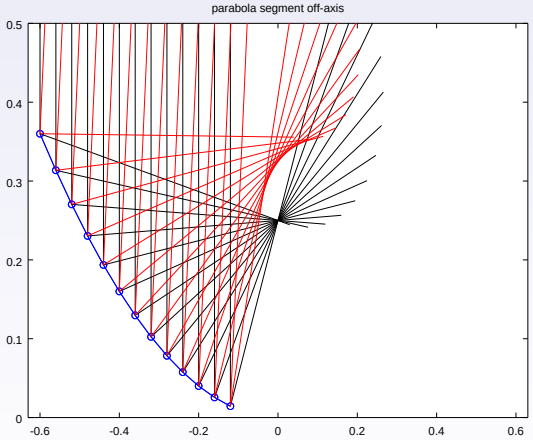

```
a=1;                    % courbure parabole
x=[-0.4:0.04:0.4];
y=a*x.^2;               % ze parabole
dtheta=5*pi/180;        % angle des rayons incidents
plot(x,y,'o-')          % trace la parabole
for k=1:length(x)       % trace les faisceaux incidentes
  line([x(k)+(1-y(k))*sin(dtheta)  x(k)],[1 y(k)]);hold on
end
r=0.64;                 % longueur rayon reflechi
dy=2*a*x;               % derivee au point x => theta=atan(dy/dx)
theta=(atan2(dy,1));
for k=1:length(x)
  line([x(k) x(k)-r*sin(2*theta(k)+2*dtheta)],[y(k) y(k)+r*cos→
      ↪(2*theta(k)+2*dtheta)]);hold on
end
```

[4] http://www.faculty.virginia.edu/rwoclass/astr511/lec16-teloptics-f03.html

Parabole

- Augmenter la surface collectrice A de l'antenne (diamètre d) et concentrer la puissance au foyer de la parabole
- Parabole : tout faisceau incident est concentré vers le foyer
- tête excentrée pour limiter la couverture du récepteur [5]
- architecture Cassegrain : réflecteur secondaire au foyer et récepteur au centre pour limiter les lobes latéraux
- $G = 4\pi A/\lambda^2 \times e = (\pi d/\lambda)^2 \times e$, $e \in [0,5..0,7]$
- ouverture angulaire : $\vartheta \simeq \lambda/d$



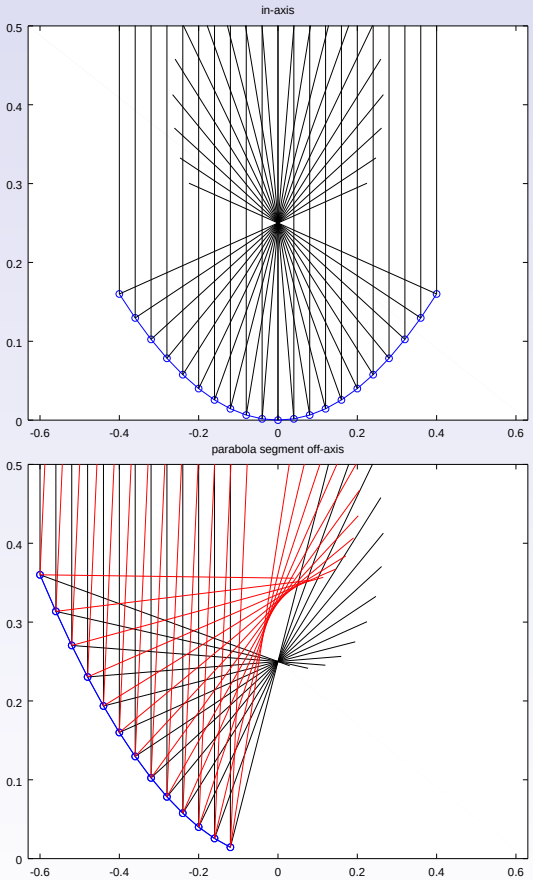



```
a=1;                    % courbure parabole
x=[-0.4:0.04:0.4];
y=a*x.^2;               % ze parabole
dtheta=5*pi/180;        % angle des rayons incidents
plot(x,y,'o-')          % trace la parabole
for k=1:length(x)       % trace les faisceaux incidentes
  line([x(k)+(1-y(k))*sin(dtheta)  x(k)],[1 y(k)]);hold on
end
r=0.64;                 % longueur rayon reflechi
dy=2*a*x;               % derivee au point x => theta=atan(dy/dx)
theta=(atan2(dy,1));
for k=1:length(x)
  line([x(k) x(k)-r*sin(2*theta(k)+2*dtheta)],[y(k) y(k)+r*cos→
      ↪(2*theta(k)+2*dtheta)]);hold on
end
```

[5] http://www.faculty.virginia.edu/rwoclass/astr511/lec16-teloptics-f03.html

Parabole

- Augmenter la surface collectrice A de l'antenne (diamètre d) et concentrer la puissance au foyer de la parabole
- Parabole : tout faisceau incident est concentré vers le foyer
- tête excentrée pour limiter la couverture du récepteur [6]
- architecture Cassegrain : réflecteur secondaire au foyer et récepteur au centre pour limiter les lobes latéraux
- $G = 4\pi A/\lambda^2 \times e = (\pi d/\lambda)^2 \times e$, $e \in [0,5..0,7]$
- ouverture angulaire : $\vartheta \simeq \lambda/d$



Exercice : calculer le gain d'une parabole de 60 cm de diamètre opérant à 10 GHz.

Idem pour l'antenne de Goldstone (70 m de diamètre).

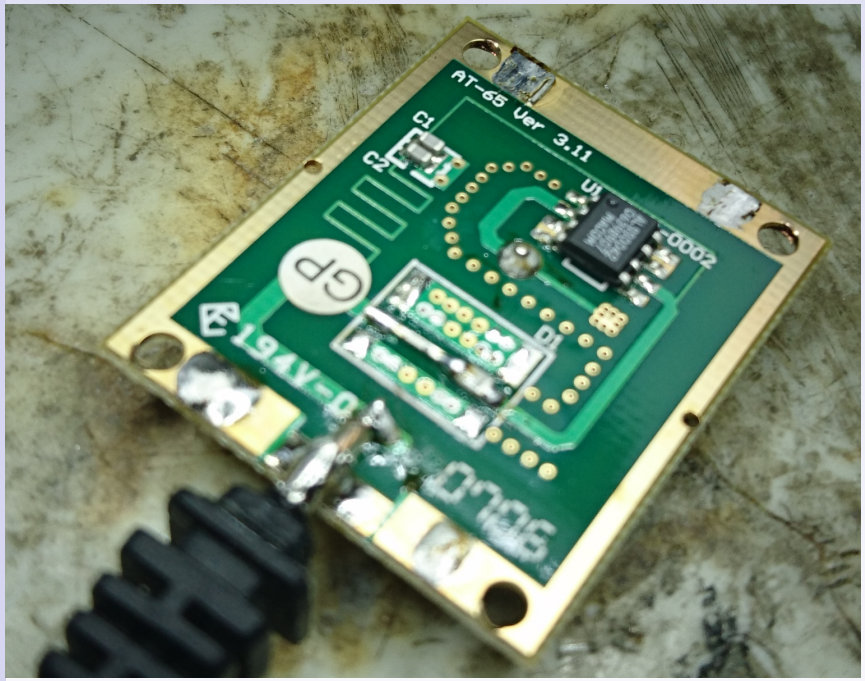
Dans les deux cas, quelle est l'ouverture angulaire du faisceau ? Comparer avec les recommandations de l'ITU sur la position d'un satellite géostationnaire à $\pm 1°$ de sa position nominale en longitude (https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/s/R-REC-S.484-3-199203-I!!PDF-F.pdf)

[6] http://www.faculty.virginia.edu/rwoclass/astr511/lec16-teloptics-f03.html

Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Antennes actives

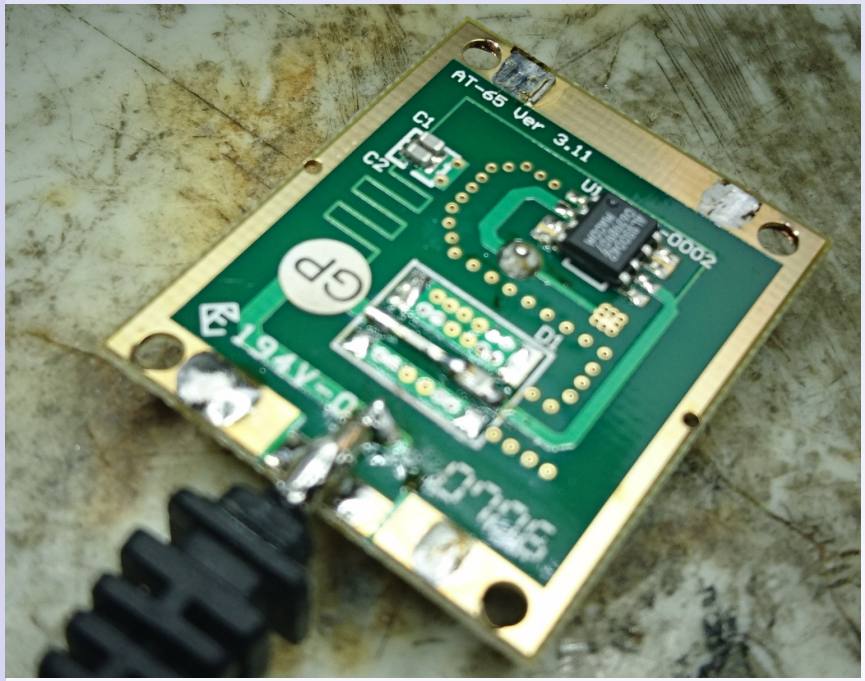
- Les cables induisent des pertes et des parasites (à 1,0 GHz, RG316 perd 12,5 dB/10 m et 19 dB/10 m à 3 GHz).
- Amplifier le signal incident au plus tôt.
- Antennes actives partagent sur un même cable alimentation et signal : T de polarisation (*bias-T*)

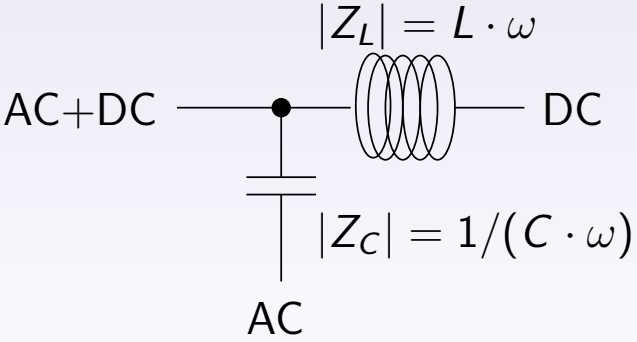


Antenne active GPS sans son filtre passe bande. Noter l'inductance sérigraphiée pour polariser l'amplificateur.

Antennes actives

- Les cables induisent des pertes et des parasites (à 1,0 GHz, RG316 perd 12,5 dB/10 m et 19 dB/10 m à 3 GHz).
- Amplifier le signal incident au plus tôt.
- Antennes actives partagent sur un même cable alimentation et signal : T de polarisation (*bias-T*)

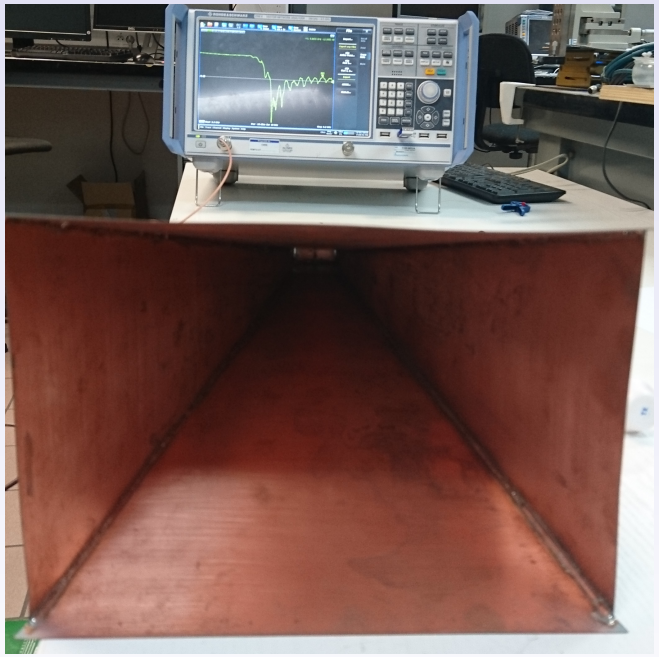




Antenne active GPS sans son filtre passe bande. Noter l'inductance sérigraphiée pour polariser l'amplificateur.

Guide d'onde et fréquence de coupure

- Guide d'onde : empêcher l'onde de rayonner dans toutes les directions mais la canaliser dans une direction privilégiée.
- Un guide d'onde présente une fréquence de coupure liée au confinement du champ électromagnétique entre les parois du conducteur[7].
- Guide d'onde circulaire : champ nul aux parois ⇒ longueurs d'ondes autorisées déterminées par les racines des polynomes de Bessel
- Guide d'onde rectangulaire : conditions d'ondes stationnaires dans les deux axes du guide.
- Exemple de la cantenna : **est-il possible de canaliser un signal wifi avec une boite de Pringles ?**

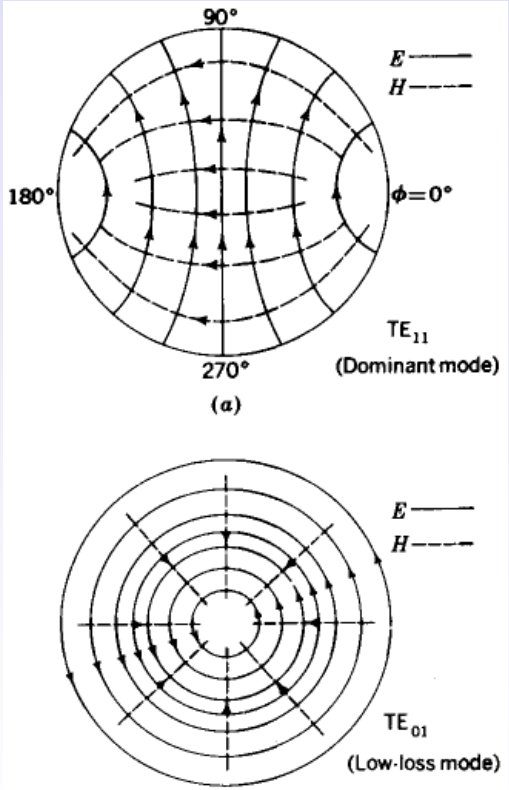


Antenne cornet (ISM, 5,8 GHz)

7. J.D. Kraus & *al.*, *Electromagnetics*, McGraw-Hill (1981), p.557, chap. 13

Guide d'onde et fréquence de coupure

- Guide d'onde : empêcher l'onde de rayonner dans toutes les directions mais la canaliser dans une direction privilégiée.
- Un guide d'onde présente une fréquence de coupure liée au confinement du champ électromagnétique entre les parois du conducteur [7].
- Guide d'onde circulaire : champ nul aux parois ⇒ longueurs d'ondes autorisées déterminées par les racines des polynomes de Bessel
- Guide d'onde rectangulaire : conditions d'ondes stationnaires dans les deux axes du guide.
- Exemple de la cantenna : **est-il possible de canaliser un signal wifi avec une boite de Pringles ?**



7. J.D. Kraus & *al.*, *Electromagnetics*, McGraw-Hill (1981), p.557, chap. 13

Guide d'onde et fréquence de coupure

- Guide d'onde : empêcher l'onde de rayonner dans toutes les directions mais la canaliser dans une direction privilégiée.
- Un guide d'onde présente une fréquence de coupure liée au confinement du champ électromagnétique entre les parois du conducteur[7].
- Guide d'onde circulaire : champ nul aux parois ⇒ longueurs d'ondes autorisées déterminées par les racines des polynomes de Bessel
- Guide d'onde rectangulaire : conditions d'ondes stationnaires dans les deux axes du guide.
- Exemple de la cantenna : **est-il possible de canaliser un signal wifi avec une boite de Pringles ?** $\lambda = 300/f[MHz]$, $r_0 \geq \lambda/3.41$

Table 13-7 CYLINDRICAL WAVEGUIDE MODES

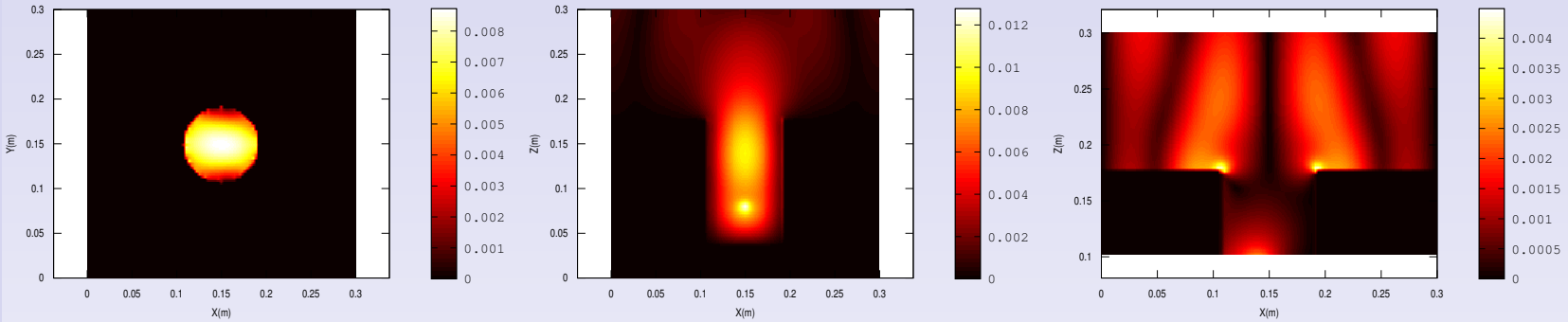
Mode designation	Eigenvalues k'_{nr}	Eigenvalues k_{nr}	Cutoff wavelength, λ_{oc}
TM_{01}		2.405	$2.61r_0$
TE_{01} (low loss)	3.832		$1.64r_0$
TM_{02}		5.520	$1.14r_0$
TE_{02}	7.016		$0.89r_0$
TE_{11} (dominant)	1.840		$3.41r_0$
TM_{11}		3.832	$1.64r_0$
TE_{12}	5.330		$1.18r_0$
TM_{12}		7.016	$0.89r_0$
TE_{21}	3.054		$2.06r_0$
TM_{21}		5.135	$1.22r_0$
TE_{22}	6.706		$0.94r_0$
TE_{31}	4.201		$1.49r_0$
TM_{31}		6.379	$0.98r_0$
TE_{41}	5.318		$1.18r_0$
TM_{41}		7.588	$0.83r_0$
TE_{51}	6.416		$0.98r_0$

7. J.D. Kraus & *al.*, *Electromagnetics*, McGraw-Hill (1981), p.557, chap. 13

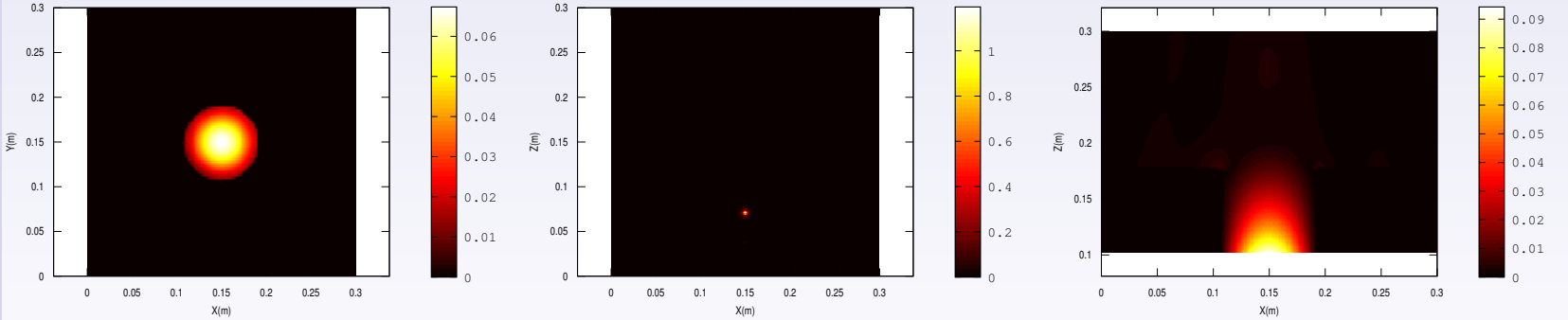
Modélisation de la cantenna

- NEC=méthode des moments
- FDTD (Finite-difference time-domain)=modélisation résolue en temps [8]

2450 MHz, monopole au bord



2450 MHz, monopole au fond

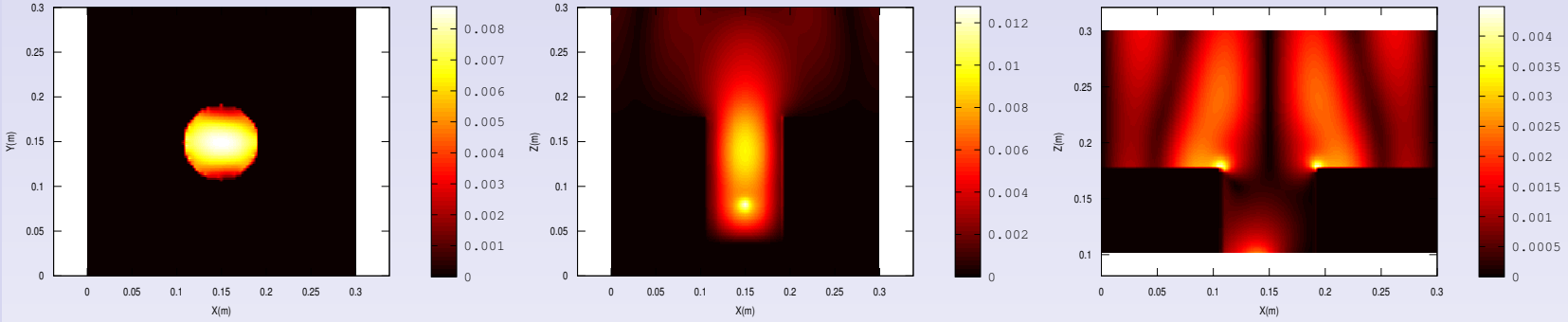


8. K. Yee *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Trans. on Antennas and Propagation **14** (3), pp. 302307 (1966)

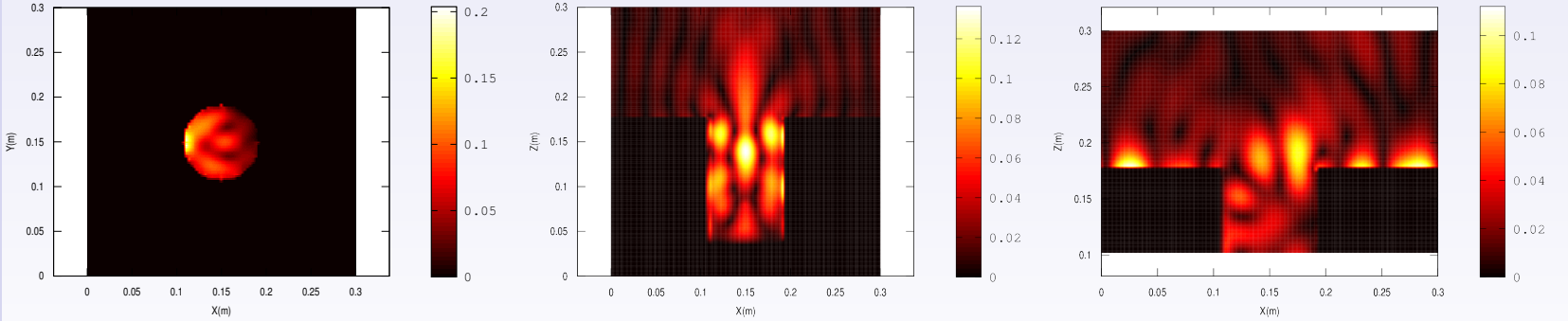
Modélisation de la cantenna

- NEC=méthode des moments
- FDTD=modélisation résolue en temps

2450 MHz, monopole au bord



5800 MHz, monopole au bord



Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Réseaux d'antennes

- La taille d'une antenne est physiquement limitée par l'intégrité de la structure ou son encombrement,
- Mise en réseau d'antennes pour "simuler" une antenne de très grande dimension,
- l'ouverture ϑ du faisceau est de l'ordre de $\sin(\vartheta) = \lambda/D \simeq \vartheta$
- $\Rightarrow$ augmenter D la taille d'antenne pour réduire ϑ et augmenter la surface collectrice
- La fonction de transfert de chaque élément rayonnant est convoluée avec la fonction de réseau

Translater une antenne induit un déphasage $\exp(j \cdot k\vec{u} \cdot \vec{O}_i)$

$$\vec{E}_i(\vec{u}) = \vec{E}_0(\vec{u}) \cdot a_i \cdot \exp(j \cdot k\vec{u} \cdot \vec{O}_i)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_T(\vec{u}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{u}) = \sum \vec{E}_0(\vec{u}) \cdot a_i \exp(j \cdot k\vec{u} \cdot \vec{O}_i)$$

Facteur de réseau : $\sum \exp(j2\pi\tau_i\Delta\nu) = \exp(j\pi(N+1)\tau\Delta\nu)\dfrac{\sin(\pi N\tau\Delta\nu)}{\sin(\pi\tau\Delta\nu)}$

pour un réseau linéaire équidistant de d ($\Delta\nu = \frac{d}{\lambda}$, $\tau = \sin(\vartheta)$)

Réseaux d'antennes isotropes

Ajouter une phase $m \cdot \varphi_0$ sur l'antenne m se traduit par un facteur de réseau qui devient

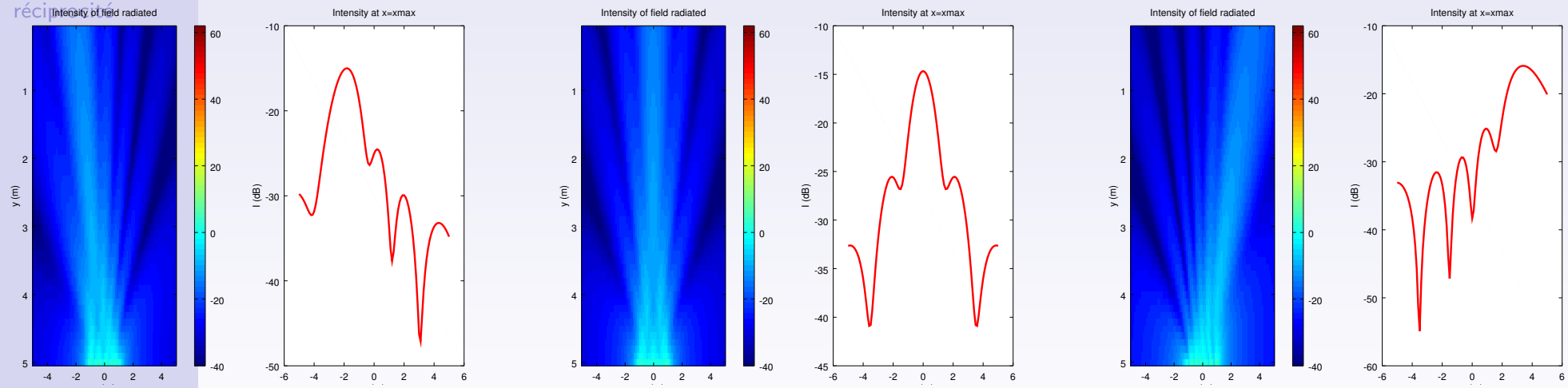
$$R(\tau) = \exp(j\pi(N+1) \cdot (\tau\Delta\nu - \phi/(2\pi)))\frac{\sin(\pi \cdot N(\tau\Delta\nu - \varphi/(2\pi)))}{\sin(\pi \cdot (\tau\Delta\nu - \varphi/(2\pi)))}$$

$\Rightarrow$ il s'agit du même résultat qu'auparavant, mais avec un translation de l'argument $\tau\Delta\nu$: balayage électronique de faisceau (rappel : $\tau = \sin(\vartheta)$).

Exercice : dans le cas d'antennes isotropes, seul le facteur de réseau subsiste, puisque le diagramme de rayonnement d'antenne est unitaire dans toutes les directions.
Proposer un programme, sous GNU/Octave, qui trace le diagramme de rayonnement (P v.s ϑ) pour un réseau d'antennes équidistantes de $d = \lambda/2$ et $d = \lambda$.
Faire balayer le faisceau par ajout d'une phase fixe entre éléments adjacents.

Réseau d'antennes omnidirectionnelles

- dans le cas du réseau linéaire équidistant, chaque élément est déphasé par rapport à son voisin
- Introduire une phase entre les éléments rayonnants = diriger le faisceau (interférences constructives dans une direction et destructives dans les autres)
- $\Rightarrow$ au lieu de mécaniquement déplacer le faisceau, balayage électronique pour modifier la direction de rayonnement



-20° 0° ($d_{src} = \lambda/2$) +35°

Simulation numérique (réseau)

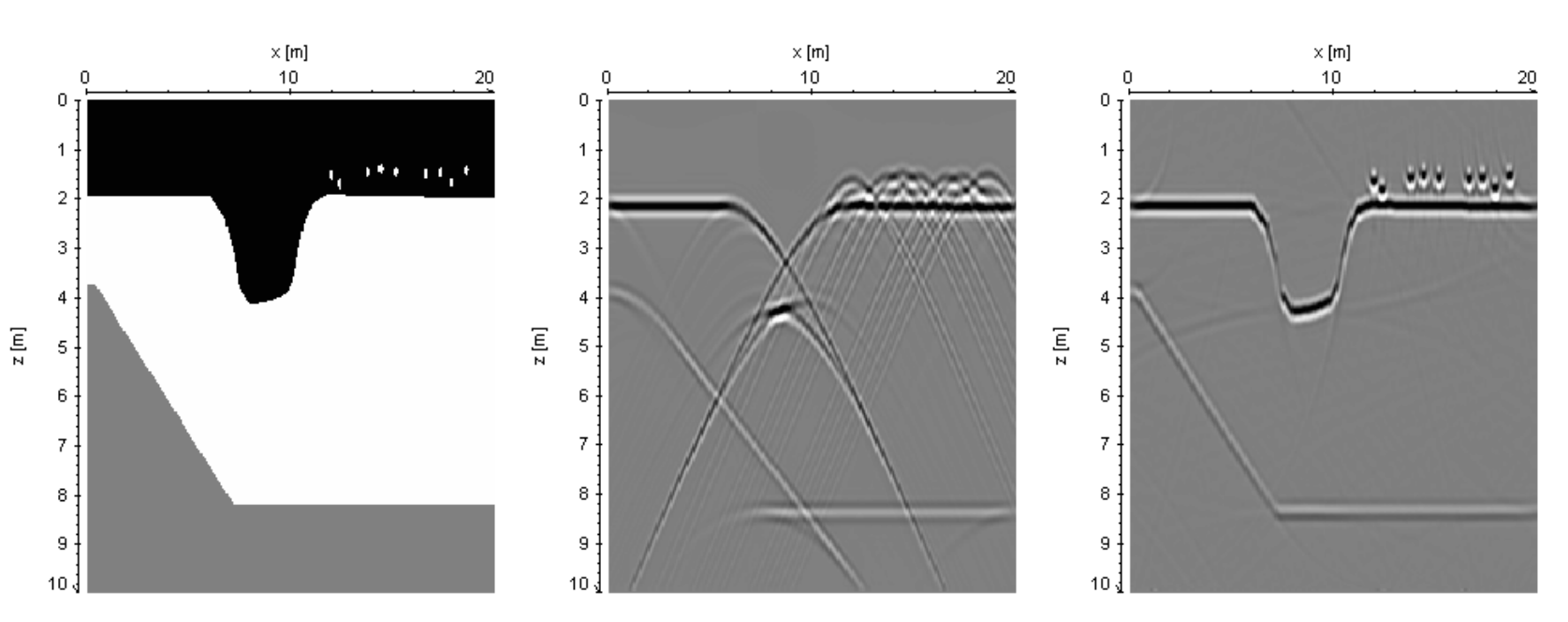
$$A(x,y) = \sum_{src} \frac{I_0}{d} \cdot \exp\left(j(\vec{k}\vec{r} + \varphi_{src})\right), \text{ avec } d = |x - x_{src} + j(y - y_{src})|$$

```
f=434e6; c = 3e8;                % frequence de travail, et c0
x=[-5:0.1:5]; y=[0.1:0.1:5];     % espace de simulation (en m)
lambda=c/f;                      % longueur d'onde (en m)
nbsrc=7                          % nombre de sources
dsrc=lambda/2;                   % espacement entre les sources
theta = -20*pi/180;              % ou 0, ou 35*pi/180;
p=[1:nbsrc];
position=(p-1)*dsrc-(nbsrc-1)/2*dsrc;  % position de la souce p
phi = 2*pi*(p-1)*f*dsrc*sin(theta)/c;

d1=zeros(length(x),length(y));% espace de la simuation
for p=1:nbsrc                    % boucle sur les sources
    for k=1:length(x)            % boucle sur l'ordonnee
        for l=1:length(y)        % boucle sur l'abscisse
            if (y(l)>0)
               angle(k,l)=atan((x(k)-position(p))/y(l));
               else angle(k,l)=pi/4;
            end
            distance=abs(x(k)-position(p)+i*y(l));
            if (distance>0)
                vect_onde = [2*pi/lambda*cos(angle(k,l)) 2*pi/lambda*sin(angle(k,l))];
                r = [y(l) x(k)-position(p)];
                d1(k,l)=d1(k,l)+1/distance*exp( i*vect_onde*r'+ i*phi(p) )/nbsrc;
            end
        end
    end
end

res1=abs(d1);
subplot(122);
plot(x,20*log10(res1(:,end)),'r', "linewidth", 2);
title("Intensity at x=xmax"); xlabel('x (m)');ylabel('I (dB)');
subplot(121);
imagesc(x,y,20*log10(flipud(res1')),[-40 62]);
xlabel('x (m)');ylabel('y (m)');colorbar; title("Intensity of field radiated");
```

Plan
Bilan de liaison
Dipôle
Maxwell
Au-delà du dipôle
Combinaison de dipôles – polar.
Guide d'onde
Réseaux d'antennes
Ouverture synthétique
Principe de réciprocité

Ouverture synthétique

- Au lieu d'avoir N éléments rayonnants, déplacer un unique élément
- utilisé en RADAR (SAR[9]) et radioastronomie (source contrôlée/stable)
- Un réflecteur ponctuel apparaît comme une hyperbole puisque $t = \frac{2}{c}\sqrt{z_{cible}^2 + x_{radar}^2}$ i.e. $\frac{c^2}{4} \cdot t^2 - x_{radar}^2 = z_{cible}^2 = cst$ (si c connu)

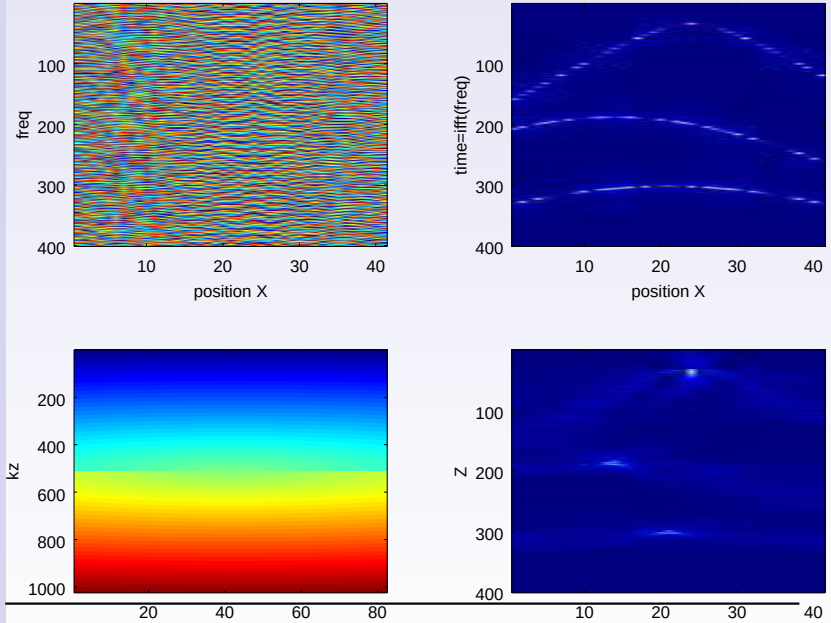


Effet de la migration en GPR (Reflex)

9. http://www.sandmeier-geo.de/Bilder/migration01.png

Ouverture synthétique

- Une antenne se déplace, généralement selon une trajectoire rectiligne et à vitesse constante ($d = v \cdot t$) ...
- ... l'accumulation des signaux forme une antenne de longueur égale à la longueur de la trajectoire.
- Reconstruction d'image par algorithme de migration : les points d'une même source sont distrbués le long d'une hyperbole.
- Méthodes efficaces par passage dans le domaine de Fourier (Stolt [10], Kirchoff)



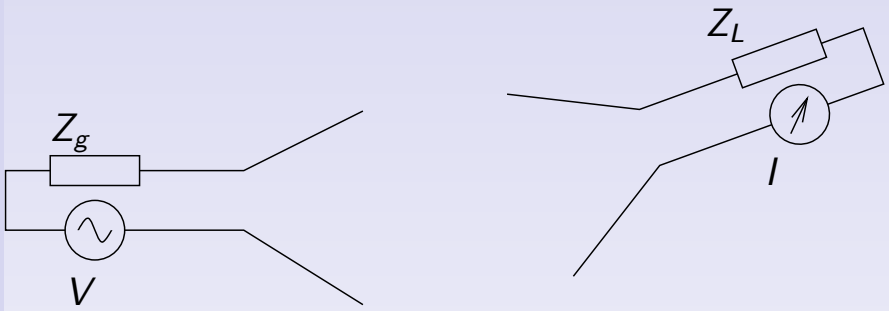
1. S_{11}(fréquences)$\rightarrow$ S_{11}(temps)
2. $\tau = \frac{1}{c}\sqrt{(x_s - x)^2 + z_s^2}$
3. $k_z^2 = k^2 - k_x^2 = f^2/c^2 - k_x^2$: passage de x à k_x par FFT
4. migration dans le domaine de Fourier (cartographie complexe)
5. $(k_x, f) \rightarrow (x, t)$ par iFFT 2D

10. www.biomecardio.com/pageshtm/tools/toolsen.htm

```
p(1,:)=[3 5]; p(2,:)=[-7 28]; p(3,:)=[0 45]; % position sources
f=linspace(1000,3000,401);                   % frequences => dt=1/Df=10 ns => D=3*401=1203 m
x=linspace(-20,20,41);                       % position du RADAR
c=300; % m/us

fs=(f(end)-f(1));
pitch=diff(x);pitch=pitch(1);
[u,v]=size(p);
for pos=1:length(x)
  for freq=1:length(f)
    lambda=c/f(freq);                        % longueur d'onde (en m)
    s11(pos,freq)=0;
    for src=1:u
      angle=atan((x(pos)-p(src,1))/p(src,2));  % atan(dx/dy)
      distance=abs(x(pos)-p(src,1)+i*p(src,2));
      s11(pos,freq)=s11(pos,freq)+exp(+2*i*pi/lambda*(cos(angle)*p(src,2)+sin(angle)*(x(pos)-->
          ↪p(src,1))));
    end
  end
end
subplot(221);imagesc(arg(s11'));xlabel('position X');ylabel('freq')
subplot(222);imagesc(abs(ifft(s11')));xlabel('position X');ylabel('time=ifft(freq)')

%   Garcia et al., Stolt's f-k migration for plane wave ultrasound imaging.
%   IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control, 2013;60:1853-1867.
%   http://www.biomecardio.com/pageshtm/publi/ieeeuffc13.pdf
RF=abs(ifft(s11'));
[nt0,nx0] = size(RF);
nt = 2^(nextpow2(nt0)+1);                    % Zero-padding
nx = 2*nx0;
fftRF = fftshift(fft2(RF,nt,nx));
f = (-nt/2:nt/2-1)*fs/nt;
kx = (-nx/2:nx/2-1)/pitch/nx;
[kx,f] = meshgrid(kx,f);
ERMv = c % /sqrt(2);
fkz = ERMv*sign(f).*sqrt(f.^2/ERMv^2+kx.^2);
fftRF= interp2(kx,f,fftRF,kx,fkz,'linear',0);
migRF = ifft2(ifftshift(fftRF));%,'symmetric');
migRF = migRF(1:nt0,1:nx0);

subplot(224);imagesc(abs(migRF));xlabel('X');ylabel('Z')
subplot(223);imagesc((fkz));xlabel('kx');ylabel('kz')
```

Principe de réciprocité

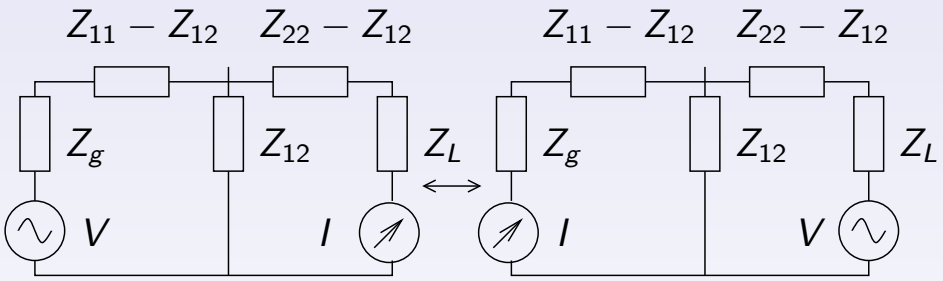
"dans tout circuit formé de composants discrets linéaires, placer une source de tension/courant dans une branche et observer le courant/tension dans toute autre branche, puis échanger la source et le détecteur, induiront la même mesure" [11]



$$I = \frac{V \cdot Z_{12}}{(Z_g + Z_{11})(Z_L + Z_{22}) - Z_{12}^2}$$

en pratique

$Z_{12} \ll Z_{11}, Z_{22}$



12

11. C. Balanis, *Antenna Theory – analysis and design (2nd Ed)*, J. Wiley & Sons (1997), p.127

12. A.W. Rudge, *The Handbook of Antenna Design, Vol. 1*, IEE Electromagnetic Waves series (1982)

Bibliographie

1. C. Balanis, *Antenna Theory – analysis and design (2nd Ed)*, J. Wiley & Sons (1997)
2. *ARRL Antenna Handbook 19th Ed.* (2004)
3. R.P. Feynman, R.B. Leighton & M. Sands, *Feynman Lectures on Physics Volume 1 (2nd Ed.)*, Addison Wesley (2005)
4. J.D. Kraus & K.R. Carver, *Electromagnetics*, McGraw-Hill (1981)
5. J.R. Mosig, *Rayonnements et antennes*, cours de l'EPFL, disponible à `epfl.wikispaces.com/file/view/REA_Polycop_0708.pdf`

De Maxwell au dipole infinitésimal

Dans un conducteur : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Résolution de Maxwell compte tenu de $\vec{j}$ et ρ : introduction des potentiels $\vec{A}$ et V tel que $\mu \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et $\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V$ et la relation de jauge de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon V = 0$.

Le dipole infinitésimal

Ainsi Maxwell se réduit aux équations d'onde

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \\ \Delta V + k^2 V = -\rho/\varepsilon \end{cases}$$

où $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$, de solution

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{r})\frac{\exp(-jk|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' \\ V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \rho(\vec{r})\frac{\exp(-jk|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' \end{cases}$$

en champ lointain si $|r'| \ll |r|$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r})\exp(-jk\vec{e}_r\cdot r')dV'$$

et de $\vec{A}$ on déduit

$$\vec{E} = j\omega\vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{A})$$

ou (en posant $\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi = 377\ \Omega$) :

$$\vec{E}_\vartheta = -j\omega\vec{A}_\vartheta,\ \ \vec{E}_\varphi = -j\omega\vec{A}_\varphi,\ \ \vec{E}_r = \vec{H}_r = \vec{0},\ \ \vec{H}_\vartheta = -\vec{E}_\varphi/\eta,\ \ \vec{H}_\varphi = \vec{E}_\vartheta/\eta$$

Le dipole infinitésimal

$$\begin{cases} E_\vartheta(r,\vartheta,\varphi) = \frac{-j\eta}{2\lambda} \cdot \frac{\exp(-jkr)}{r} \vec{e}_\vartheta \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}) \exp(-j\dot{k}\vec{e}_r \cdot r') dV' \\ E_\varphi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{-j\eta}{2\lambda} \cdot \frac{\exp(-jkr)}{r} \vec{e}_\varphi \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}) \exp(-j\dot{k}\vec{e}_r \cdot r') dV' \end{cases}$$

Courant $I = I_0 \cos(\omega t)$ périodique dans un élément infiniment court Δz pour simplifier l'intégrale :

$$\vec{j} = \vec{e_z} I_0 / S$$

avec S la section du dipôle et puisque le volume vaut $S \cdot dz$, l'intégrale devient (argument de l'exponentielle nul) $I \Delta z \vec{e_z}$ et

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \frac{\exp(-j \cdot kr)}{r} \vec{e_z} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_\vartheta = \frac{j\eta}{2\lambda} I_0 \Delta z \frac{\exp(-j \cdot kr)}{r} \sin(\vartheta) \\ \vec{E}_\varphi = 0 \end{cases}$$

null en $\vartheta = 0$ et puissance maximum rayonnée vers $\vartheta = \pi/2$